SHONAN INSTITUTE OF
TECHNOLOGY JOURNAL
Vol. 54, No. 1, 2020

伝達マトリクスによる連立線形微分方程式の解法
(プラントシステムへの応用)

湯澤　聡*

Solution of Simultaneous Liner Differential Equations with Transfer Matrix Method
(Application to Plant Systems)

Satoshi YUZAWA

Abstract:
For simply expressing the behavior of process values in plant systems, the transfer matrix method is introduced to solve simultaneous differential equations. First, the matrix type is determined to each plant element. And, the elements connection is expressed as the matrix's product. Finally, the simultaneous equations are easily converged to one representative liner differential equation.

Keywords：Simultaneous liner differential equations, Transfer matrix, Plant system, Fluid transport control

要旨:
流体輸送を行うプラントシステムに関しては，その挙動を表現するのは，多点の圧力と流量の変数からなる連立微分方程式である．ただし，通常の消去法では，解法が非常に煩雑となるのが一般である．そこで，非圧縮性流体に限定すること，および，平衡動作点からの微小線形化を行うことを条件として，伝達マトリクスの導入を行った．プラントの個別要素ごとに伝達マトリクスを定義し，プラント要素の接続は，伝達マトリクス同士の積によって表現できるようにした．これを用いることにより，システムの挙動を表す微分方程式を，簡便に導出できることを提示した．

キーワード：連立線形微分方程式，伝達マトリクス，プラントシステム，流体輸送制御

1．はじめに

力学現象の多くは，運動方程式やエネルギー保存則，質量保存則などの方程式として表現される．それらのほとんどには，微分と積分の項が含まれる．すなわち，力学的現象の挙動を知ることは，微分方程式を解き，その解である関数の性質を調べることであるといえる．

挙動を調べる対象が，多くの要素から構成されるシステムとなれば，多変数の連立微分方程式を扱うこととなる．変数の間で相互作用する場合となれば，連立微分方程式を消去法によって整理していく過程は，システムの規模が大きくなるほど非常に煩雑となり，計算負荷が重くなる事態に至る．

ところで，変数が相互干渉する実例としては，電気回路を挙げることができる．電圧と電流は，回路上で相互作用しているので，これらを一組として扱うことになる．回路システムは，二端子対回路に要素分割し，要素ごとに変数を行列によって関係付ける方法が，一般的な計算法である．これは，回路システムを表現する微分方程式を，統一的手順で導出することを可能にしている．連立微分方程式の消去法による解法よりも，計算負荷が軽減される利点をもたらす．

この回路計算の手法は，力学現象である機械振動に応用されており，伝達マトリクス法として知られている [1]．そこでは，質点やばね等の機械系要素から構成されるシステムは，それを表現する微分方程式が，簡便に導出されることになる．

そこで，本報は伝達マトリクス法の適用対象を拡げることを目的とし，その適用対象として，流体輸送するプラントシステムを取り上げるものとする．対象とするシステムは，バルブ，管路，分岐，タンク等

*湘南工科大学　工学部　機械工学科　准教授

のプラント要素によって構成される．そこでは，流体の圧力と流量が変数の一組として扱われる．これらの関係を表す連立微分方程式として，伝達マトリクスを使用した数式表現を導入する．次いで，プラントシステムを表現する微分方程式について，これを導出する手順を提示するものとする．

2. 伝達マトリクスの導入

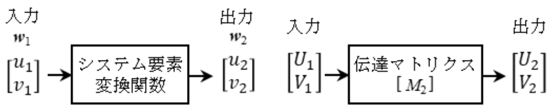
システムを構成要素ごとに分解したとき，個別の要素における入力と出力は，図 1 (a) のようにそれぞれ 2 変数で構成されるものとする．ここでは，入力と出力を，それぞれ列ベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ として表現し，それらの成分を次のように定義する．

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

入力と出力の関係が，以下のように微分項と積分項の線形結合で表され，かつ，同次の方程式であるとする．

$$u_1 = \left(a_1 \frac{du_2}{dt} + a_2 u_2 + a_3 \int u_2 dt \right) + \left(b_1 \frac{dv_2}{dt} + b_2 v_2 + b_3 \int v_2 dt \right) \tag{3}$$



(a) 入出力の関係　　(b) ラプラス変換後の関係

図 1　2 変数の入出力とシステム要素

$$v_1 = \left(c_1 \frac{du_2}{dt} + c_2 u_2 + c_3 \int u_2 dt \right) + \left(d_1 \frac{dv_2}{dt} + d_2 v_2 + d_3 \int v_2 dt \right) \tag{4}$$

ここに，t：時間．係数 a_k, b_k, c_k, d_k（k = 1,2,3）は，すべて定数係数．

このような要素が図 2 (a) のように接続していくシステムでは，変数も方程式の係数も多くなる．連立微分方程式を消去法で解くとすれば，その計算過程は煩雑となる．

そこで，次の 2 点を前提条件とすることにより，複素数 s-領域へのラプラス変換を行うことにする．

① 変数は，静的平衡状態からの変化量とする．すなわち，平衡状態の値を u_{i0}, v_{i0}（i は節点番号であり，ここでは i = 1, 2)として，そこからの変化分 $\Delta u_i, \Delta v_i$ を，以下の式にて定義する．

$$\Delta u_i = u_i - u_{i0} \tag{5}$$

$$\Delta v_i = v_i - v_{i0} \tag{6}$$

② このように定義した変数 $\Delta u_i, \Delta v_i$ は初期値を 0 とする．これらの変数のラプラス変換を以下に定義する．

$$L\,[\Delta u_i] = U_i \tag{7}$$

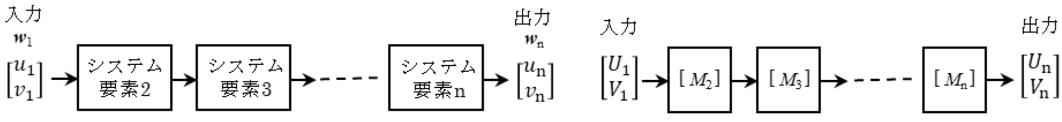
$$L\,[\Delta v_i] = V_i \tag{8}$$

これらの条件下で，先の連立微分方程式 (3), (4)を同時にラプラス変換すれば，以下のような伝達関数となる．

$$U_1 = \left(s a_1 + a_2 + \frac{a_3}{s} \right) U_2 + \left(s b_1 + b_2 + \frac{b_3}{s} \right) V_2 \tag{9}$$

$$V_1 = \left(s c_1 + c_2 + \frac{c_3}{s} \right) U_2 + \left(s d_1 + d_2 + \frac{d_3}{s} \right) V_2 \tag{10}$$

この伝達関数の一組は，次式のような行列表示が可能となる．



(a) 入出力の関係　　(b) ラプラス変換後の関係

図 2　システム要素の接続

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sa_1 + a_2 + \dfrac{a_3}{s} & sb_1 + b_2 + \dfrac{b_3}{s} \\ sc_1 + c_2 + \dfrac{c_3}{s} & sd_1 + d_2 + \dfrac{d_3}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

これは図 1 (b) に示すように，複素変数の列ベクトル ${}^t[\,U_2\ V_2\,] \rightarrow {}^t[\,U_1\ V_1\,]$ への線形変換を示している．その変換の行列 $[\,M_2\,]$ は，成分が伝達関数であるので，伝達マトリクスと呼ぶ[(2)]．

システムにおいて，要素の接続が図 2 (b) に示すように連続するときは，次式のように伝達マトリクスを合成していけばよいことがわかる：

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ V_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

すなわち，伝達マトリクスを用いることにより，システムを表現する伝達関数が，統一的な手順によって計算実行できることになる．

3. プラント要素の伝達マトリクス表現

3.1 前提条件

ここからは，流体輸送を行っているプラントシステムを対象として，その挙動を微分方程式によって表現する．そこに伝達マトリクスを導入していくものとする．そのための前提条件として，以下の 2 点を設定する．

① 流体は非圧縮性の液体とする： 圧縮性流体を扱うと，密度変化の要因が加わることになる．数式表現が複雑となるので，ここでは扱わない．

② 入力と出力の変数は，プラントシステムの平衡動作状態からの変化量とする： これにより，プラントシステムの挙動が，線形定係数微分方程式として表現される．このようにしなければ，流体力学の式が非線形であることにより，線形定係数微分方程式が導出されない．その解法は格段に難しくなる．

3.2 プラントの抵抗要素とその直列接続

（1）バルブ： バルブはプラントの抵抗要素の一つである．図 3 (a) に示すように，入口圧力を p_1，出口圧力を p_2，通過体積流量を $q_1 = q_2$ とすれば，これらの関係は次のように表される．

$$p_1 - p_2 = \rho \left(\frac{q_2}{C_V} \right)^2 \tag{13}$$

ここに，ρ：流体密度，C_V：バルブの容量係数[(3)]．

この式は，流量 q_2 の非線形項を含んでいる．平衡状態で $p_1 = p_{10}$，$p_2 = p_{20}$，$q_2 = q_{20}$ であるとして，改めて表す．

$$p_{10} - p_{20} = \rho \left(\frac{q_{20}}{C_V} \right)^2 \tag{14}$$

平衡状態からの変化分が，入口圧力は Δp_1，出口圧力は Δp_2，通過体積流量は Δq_2 であるとする．このとき，バルブの関係式(13)は，変化時の入口圧力（$p_{10} + \Delta p_1$），出口圧力（$p_{20} + \Delta p_2$），通過体積流量（$q_{20} + \Delta q_2$）にても成り立ち，次のように表される．

$$\left(p_{10} + \Delta p_1 \right) - \left(p_{20} + \Delta p_2 \right) = \rho \left(\frac{q_{20} + \Delta q_2}{C_V} \right)^2 \tag{15}$$

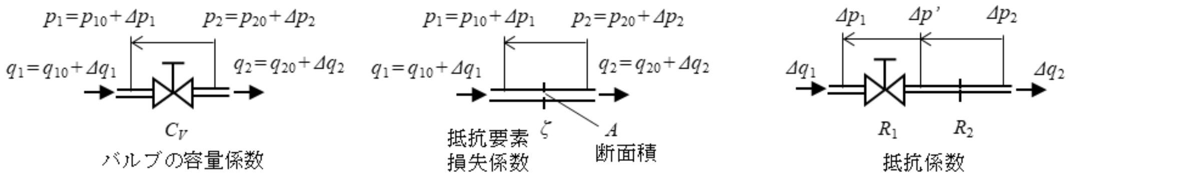
密度については，非圧縮性流体を前提条件としているので，$\rho =$ 一定である．式(14)と(15)から両辺同士の差を計算すれば，次のように変形される：

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = \rho \frac{2 q_{20}}{{C_V}^2} \Delta q_2 \tag{16}$$

さらに，次式にてバルブの抵抗係数 R_V を定義する．

$$R_V = \rho \frac{2 q_{20}}{{C_V}^2} \tag{17}$$

このようにすれば，$\Delta p_1, \Delta p_2, \Delta q_2$ の関係が次のよう



(a) バルブ　(b) バルブ以外の抵抗要素　(c) 抵抗要素の直列接続（微小線形化）

図 3 プラントの抵抗要素

に単純化されて導出されることになる．

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = R_V \Delta q_2 \tag{18}$$

（2）バルブ以外の抵抗要素：　流路の絞りや摩擦もプラントの抵抗要素となる．図 3 (b) に示すように，その要素の入口圧力を p_1，出口圧力を p_2，通過体積流量を $q_1 = q_2$ と定義すれば，一般に次の形式で表される．

$$p_1 - p_2 = \varsigma \frac{1}{2} \rho \left(\frac{q_2}{A} \right)^2 \tag{19}$$

ここに，ζ : 損失係数[4]，A : 流路の断面積.

ここから，平衡状態からの変化分を扱うように変形すれば，バルブの場合と同様に，次の式が導出される．

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = R_R \Delta q_2 \tag{20}$$

ここで，R_R は抵抗係数であり，次の式にて定義される．

$$R_R = \rho \frac{\varsigma q_{20}}{A^2} \tag{21}$$

（3）抵抗要素の直列接続：　抵抗要素が図 3 (c) のように直列接続しているものとする．個別の要素については，以下の関係で表現されるものとする．

$$\Delta p_1 - \Delta p' = R_1 \Delta q_2 \tag{22}$$

$$\Delta p' - \Delta p_2 = R_2 \Delta q_2 \tag{23}$$

これらの両辺同士の和を計算すれば，直列接続の合成要素として，次の関係式が導出される．

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = R \Delta q_2 \tag{24}$$

ここに，

$$R = R_1 + R_2 \tag{25}$$

すなわち，抵抗要素の直列接続は，各要素の抵抗係数 R_k から総和 R を計算して，式(25)に適用すればよいことがわかる．

（4）伝達マトリクス：　プラント要素を通過する流れの関係を，2 変数の入力・出力関係によって表現する．ここに，入力と出力の列ベクトル $\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$ をプラント向けとして再定義し，以下のように表す.

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta q_1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} \Delta p_2 \\ \Delta q_2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

これらの成分を用いれば，抵抗要素の関係は，以下の連立方程式として表現されることになる．

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = R \Delta q_2 \quad \cdots 式(24)再掲$$

$$\Delta q_1 = \Delta q_2 \tag{28}$$

ここでラプラス変換を行う．変数のラプラス変換を以下に定義する．

$$L\left[\Delta p_{\mathrm{i}}\right] = P_{\mathrm{i}} \tag{29}$$

$$L\left[\Delta q_{\mathrm{i}}\right] = Q_{\mathrm{i}} \tag{30}$$

ここに，i はプラント要素の接続位置に付す番号であり，ここでは i = 1, 2．これにより，式(24)と(28)の連立方程式は，以下に変換される：

$$P_1 - P_2 = R Q_2 \tag{31}$$

$$Q_1 = Q_2 \tag{32}$$

すなわち，行列表示を行なえば，次式に示す抵抗要素の伝達マトリクスが導出されたことになる．

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

3.3 管路要素，および抵抗要素との直列接続

（1）管路区間：　図 4 (a) に示す管路区間の流体に関しては，次の運動方程式が成り立つ[5]．（ただし，$q_1 = q_2$ ）

$$\rho \ell \frac{dq_2}{dt} = f \tag{34}$$

ここに，ℓ : 区間長，f : 管路区間に作用する外力．この f は圧力と管摩擦の和であり，次のように表現される．

$$f = A\left(p_1 - p_2\right) - A\lambda \frac{\ell}{d_H} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{q_2}{A} \right)^2 \tag{35}$$

ここに，λ : 管摩擦係数，d_H : 水力直径（円形断面では直径と同じ）[6]. この式(35)を式(34)に代入すれば，以下のように変形される．

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho \ell}{A} \frac{dq_2}{dt} + \lambda \frac{\ell}{d_H} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{q_2}{A} \right)^2 \tag{36}$$

この式が管路要素を表す微分方程式となる．先の 3.2 節の抵抗要素で行った方法と同様に，動作平衡状態からの変化量を用いて線形定係数微分方程式の形式とすれば，以下のように表現される．

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = L \frac{d\Delta q_2}{dt} + R_P \Delta q_2 \tag{37}$$

ここでは，L を流体輸送のインダクタンスとして次式に定義する．なお，これは音響伝播のイナータンスと一致する[7].

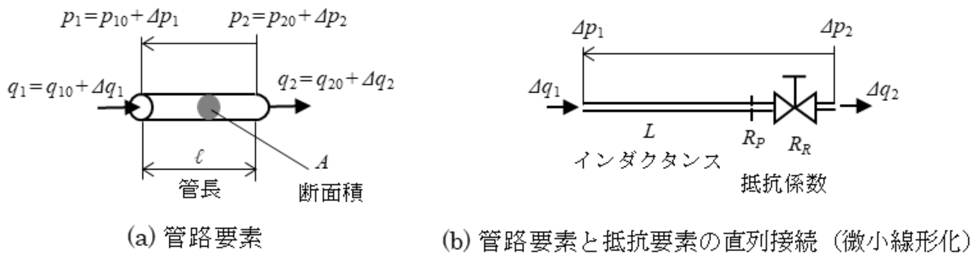


図 4　プラントの管路要素

$$L=\frac{\rho\ell}{A} \tag{38}$$

抵抗係数 R_P は，先の 3.2 節の抵抗要素と同様に以下に定義する．

$$R_P=\lambda\frac{\ell}{d_H}\frac{\rho q_{20}}{A^2} \tag{39}$$

圧力と通過体積流量の変化量は，式(37)の関係にあり，これより，圧力の変化量はインダクタンスと抵抗のそれぞれ要因の単純和となっていることがわかる．

（2）管路要素と抵抗要素の直列接続：　抵抗要素の直列接続と同様に和算が可能である．図 4 (b) のように接続しているものとすれば，その合成要素として，次の式に表現される．

$$\Delta p_1-\Delta p_2=L\frac{d\Delta q_2}{dt}+R\Delta q_2 \tag{40}$$

ここに，

$$R=R_P+R_R \tag{41}$$

すなわち，管路要素と抵抗要素の直列接続は，インダクタンスの項と抵抗要素の項に分類される．抵抗係数は総和 R を計算して，式(40)を適用すればよいことがわかる．

（3）伝達マトリクス：　3.2 節の抵抗要素と同様に，式(26), (27)で表現される列ベクトルの成分を用いれば，管路要素の関係は以下の連立微分方程式として表現される．

$$\Delta p_1-\Delta p_2=L\frac{d\Delta q}{dt}+R\Delta q_2\cdots\text{式(40)再掲}$$

$$\Delta q_1=\Delta q_2 \tag{42}$$

ここでラプラス変換を行えば，以下の連立方程式に変換される．

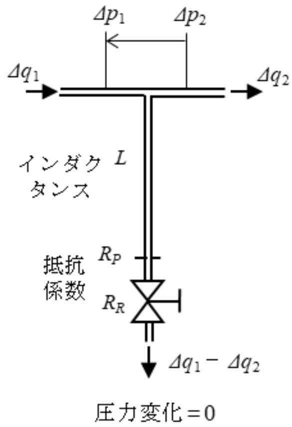


図 5　管路の分岐

$$P_1-P_2=\left(sL+R\right)Q_2 \tag{43}$$

$$Q_1=Q_2 \tag{44}$$

すなわち，行列表示を行えば，管路要素と抵抗要素の直列接続を表現する伝達マトリクスが導出されたことになる．

$$\begin{bmatrix}P_1\\Q_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & sL+R\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_2\\Q_2\end{bmatrix} \tag{45}$$

3.4 分岐

抵抗要素と管路要素が，図 5 のように分岐しているものとする．このとき，入力と出力の連立方程式は以下のようになる．

$$\Delta p_1=\Delta p_2 \tag{46}$$

$$\Delta p_2 = L\frac{d\left(\Delta q_1 - \Delta q_2\right)}{dt} + R\left(\Delta q_1 - \Delta q_2\right) \tag{47}$$

ここでラプラス変換を行えば，次の連立方程式に変換される．

$$P_1 = P_2 \tag{48}$$

$$P_2 = \left(sL + R\right)\left(Q_1 - Q_2\right) \tag{49}$$

すなわち，次のように行列表示を行えば，分岐の伝達マトリクスが導出されたことになる．

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{sL+R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{50}$$

3.5 容量要素

（1）液位タンク：　流体は非圧縮性なので，容量への貯蔵量は液位として表される．図 6 に示すタンクに関して，その断面積を S, 液位を h とすれば，次のような質量保存則が成り立つ．

$$\int\left(q_1 - q_2\right)dt = Sh \tag{51}$$

平衡動作状態からの変化量を使用するものとし，液位の平衡状態を h_0, そこからの変化量を Δh とすれば，次のように変形される．

$$\int\left(\Delta q_1 - \Delta q_2\right)dt = S\Delta h \tag{52}$$

ここで，圧力と液位の関係が $p = \rho gh$ (g は重力加速度)であることから，液位の変化量 Δh は流路の圧力の変化量に対応する．したがって，以下の関係が成り立つことになる．

$$\Delta h = \frac{\Delta p_2}{\rho g} \tag{53}$$

ここで，容量係数を次式のように定義する．

$$C = \frac{S}{\rho g} \tag{54}$$

式(53),(54)を式(52)に代入すれば，以下に示すように，容量要素を表す積分方程式が導出される．

$$\int\left(\Delta q_1 - \Delta q_2\right)dt = C\Delta p_2 \tag{55}$$

（2）伝達マトリクス：　これまでと同様に，入力と出力の列ベクトル成分を用いれば，容量要素の関係は以下の連立積分方程式として表現される．

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \tag{56}$$

$$\int\left(\Delta q_1 - \Delta q_2\right)dt = C\Delta p_2 \quad \cdots式(55)再掲$$

ここでラプラス変換を行えば，次の連立方程式に変換される．

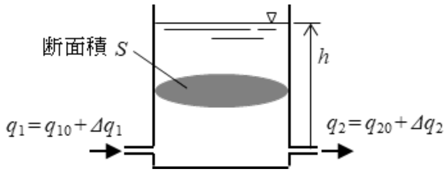


図 6　プラントの容量要素（液位タンク）

$$P_1 = P_2 \tag{57}$$

$$\frac{1}{s}\left(Q_1 - Q_2\right) = CP_2 \tag{58}$$

すなわち，行列表示を行えば，容量要素を表現する伝達マトリクスが導出されたことになる．

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{59}$$

4. プラントシステムへの適用

4.1 プラントシステムを表現する連立微分方程式

ここでは図 7 に示すプラントシステムを対象とする．ポンプにて加圧された流体は，制御弁にて圧力が制御され，下流のプラント要素へ送出される．平衡動作状態から，制御弁圧力が Δp_1 変化したときに，液位タンク下流の流量が Δq_6 変化するものとして，その関係を導出するものとする．

このプラントシステムには，プラント要素の接続点に位置番号 i = 1～6 を付す．各位置にて圧力変化量 Δp_i，および，流量変化量 Δq_i を変数定義して，以下に各要素に関する連立微分方程式（一部は積分方程式）を列挙して提示する．

・位置番号 1-2：　プラント要素として，制御弁から分岐（位置番号 3-4）までのインダクタンスを抽出する．この区間に関する連立微分方程式は以下の通りである．

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = L_2\frac{d\Delta q_2}{dt} \tag{60}$$

$$\Delta q_1 = \Delta q_2 \tag{61}$$

・位置番号 2-3：　制御弁から分岐（位置番号 3-4）までの抵抗要素を合成したものである．抵抗係数は合算値とする．この区間に関する連立微分方程式は以下の通りである．

$$\Delta p_2 - \Delta p_3 = R_3\Delta q_3 \tag{62}$$

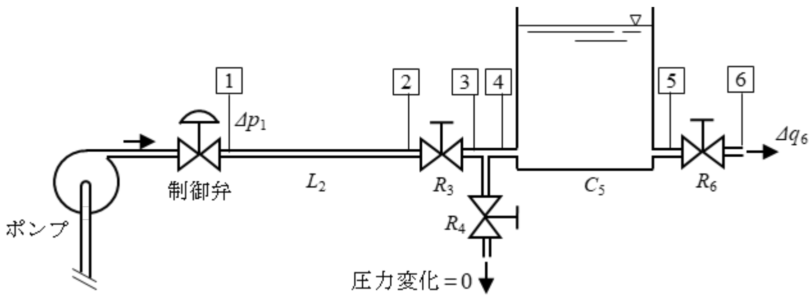


図 7　プラントシステム（位置番号 1 の圧力変化が入力．位置番号 6 の流量変化が出力）

$$\Delta q_2 = \Delta q_3 \tag{63}$$

・位置番号 3-4：　分岐であり，分岐後は抵抗要素のみとなっている．この区間に関する連立微分方程式は以下の通りである．

$$\Delta p_3 = \Delta p_4 \tag{64}$$

$$\Delta p_4 = R_4\left(\Delta q_3 - \Delta q_4\right) \tag{65}$$

・位置番号 4-5：　容量要素が配置されており，この区間に関する連立積分方程式は以下の通りである．

$$\Delta p_4 = \Delta p_5 \tag{66}$$

$$\int\left(\Delta q_4 - \Delta q_5\right)dt = C_5\Delta p_5 \tag{67}$$

・位置番号 5-6：　バルブが配置されており，この区間に関する連立微分方程式は以下の通りである．

$$\Delta p_5 - \Delta p_6 = R_6\Delta q_6 \tag{68}$$

$$\Delta q_5 = \Delta q_6 \tag{69}$$

以上から入力 Δp_1 と出力 Δq_6 の関係式を導出するには，これら以外の変数を，式(60)～(69)からすべて消去していくことになる．その過程は非常に煩雑となるのが一般的である．

4.2 伝達マトリクス法の適用

各要素における関係を，伝達マトリクスを用いて以下に列挙する．なお，すべての諸量と変数はラプラス変換されている．

・位置番号 1-2：

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sL_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{70}$$

・位置番号 2-3：

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_3 \\ Q_3 \end{bmatrix} \tag{71}$$

・位置番号 3-4：

$$\begin{bmatrix} P_3 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_4 \\ Q_4 \end{bmatrix} \tag{72}$$

・位置番号 4-5：

$$\begin{bmatrix} P_4 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC_5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_5 \\ Q_5 \end{bmatrix} \tag{73}$$

・位置番号 5-6：

$$\begin{bmatrix} P_5 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_6 \\ Q_6 \end{bmatrix} \tag{74}$$

これらを合成すれば，位置番号 1 と 6 の両端間で変数関係が提示されることになる．

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sL_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC_5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & R_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_6 \\ Q_6 \end{bmatrix} \tag{75}$$

なお，位置 6 は大気開放であり，すなわち $P_6 = 0$ である．このとき，入力の圧力変化 P_1 に対する出力の流量変化 Q_6 は，次の伝達関数にて表現される．

$$\frac{P_1}{Q_6} = s^2L_2C_5R_6 + s\left\{L_2\left(1+\frac{R_6}{R_4}\right)+C_5R_3R_6\right\}$$

$$+\left\{R_3 + R_6\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right)\right\} \tag{76}$$

この式を逆ラプラス変換すれば，次のように線形定係数微分方程式が表れる．

$$L_2 C_5 R_6 \frac{d^2 \Delta q_6}{dt^2} + s\left\{ L_2 \left(1 + \frac{R_6}{R_4} \right) + C_5 R_3 R_6 \right\} \frac{d \Delta q_6}{dt}$$
$$+ \left\{ R_3 + R_6 \left(1 + \frac{R_3}{R_4} \right) \right\} \Delta q_6 = \Delta p_1 \tag{77}$$

以上をもって，システムの挙動を表現する式が導出されたことになる．その過程は消去法よりも簡便であることが，ここに提示されたといえる．

5. おわりに

流体輸送を行うプラントシステムに関しては，その挙動を表現するのは，多変数からなる連立微分方程式であり，一般の消去法による解法は非常に煩雑であった．そこに，非圧縮性流体に限定すること，および，平衡動作点からの微小線形化を行うことによって，伝達マトリクスの導入を行った．プラントの個別要素ごとに伝達マトリクスを定義することにより，要素の接続は，伝達マトリクス同士の積で表現されるようにした．これを用いることにより，システムの挙動を表す微分方程式は，簡便に導出することを可能とした．

参考文献

(1) 田島清灝，振動の工学（1970)，p.215，産業図書.
(2) Prentis, J. M. and Leckie, F.A, Mechanical Vibrations: An Introduction to Matrix Methods (1963), Longmans.（プレンティス・レキー，加川幸雄訳，マトリクス機械振動解析入門（1974)，p.112，ブレイン図書）
(3) Hutchison, J.W. ed., ISA Handbook of Control Valves, 2nd ed. (1976), p.182, Instrument Society of America.
(4) 日本機械学会編, 管路・ダクトの流体抵抗（1979)，p.7，日本機械学会.
(5) 日本機械学会編，機械工学便覧，A5 編 流体工学（1986)，p.19，日本機械学会.
(6) 同書, p.76.
(7) 三井田惇郎，音響工学（1987), p.33，昭晃堂.