SHONAN INSTITUTE OF
TECHNOLOGY JOURNAL
Vol. 57, No. 1, 2023

量子 DPSK 信号の量子受信機性能に関する考察

清水　哲也*

Study for quantum receiver performance of quantum DPSK signal

Tetsuya SHIMIZU

Abstract:
Recently, Differential Phase Shift Keying (DPSK) using relative phase information on light and 4-DPSK communication are actively researched aiming at the super-speed-up. The absolute phase that is based on the quantum signal detection theory up to now is announced, and it announces and the research of the quantum reception performance of already-known PSK and the QAM communication is announced. However, neither the quantum expression of the communication system by the DPSK signal nor the research on the analysis are performed. The present study shows the quantum expression of DPSK, and shows the analysis of performance on those quantum receivers while showing the concrete example.

Keywords：quantum signal detection theory, quantum communication theory, DPSK

要旨:
近年，超高速化を目指して光の相対位相情報を利用したDifferential Phase Shift Keying(DPSK)や4-DPSK通信の研究が活発に行われている．これまで，量子信号検出理論に基づいて，絶対位相が既知のPSKやQAM通信の量子受信性能の研究が発表されている．しかし，DPSK信号による通信系の量子力学的表現や解析に関する研究はなされていない．本研究は，DPSKの量子力学的表現を示し，具体例を示しながら，それらの量子受信機の性能解析を示す.

キーワード：量子信号検出理論，量子通信理論，DPSK

1. はじめに

現在の光通信での通信方式は，on-off などの通信方式から無線通信に用いられる振幅偏移変調(Amplitude Shift Keying：ASK)[1]，位相偏移変調(Phase Shift Keying：PSK)[2]，直交振幅変調(Quadrature Amplitude Modulation：QAM)[3]はもちろん多重化技術でもある符号分割多元接続(Code Division Multiple Access：CDMA)[4]なども取り込まれている．これに対して受信側では，今までと同じ直接検波や，ホモダイン検波，ヘテロダイン検波などが想定されている．そして，それらの受信機で性能特性が示されている．光通信である以上，量子的な効果を必ず受ける．しかし，その光のパワーが大きいので量子的効果を無視することができる．しかし，量子的効果を考慮することによってさらなる性能の改善が見込める．よって，本研究では，種々の通信方式を量子力学的に表現し，それらの量子受信機の性能解析をおこなう．

*湘南工科大学　工学部　情報工学科　准教授

2. 従来の信号検出理論

通信を行う際，信号の送信者・受信者間をつなぐ通信路や受信機において，信号に不可避な雑音が加わる．その結果，送信者が送った信号と異なる信号を受信者は受け取ることになる．そこで，受信者は送信者がどのような信号を送信したのかをできる限り正しく判定する必要があり，そのための理論が信号検出理論である．以下では，信号ごとの損失係数（信号ごとの重要度）は等しいものとして，システムを誤り率によって評価する．誤り率P_eは，生起確率ξ_iで送信される送信シンボル$x_i, i = 1,2,\cdots,N$と，受信される受信シンボル$y_j, j = 1,2,\cdots,N$を用いて送信シンボルx_iのときに受信シボルy_jである条件付き確率を$P(j|i)$として，次のように表される

$$P_e = 1 - \sum_{i=1}^{N} \xi_i P(i|i) \tag{1}$$

いま考える通信システムの数学的モデルは，以下のとおりである．

1. 送信者は，送りたい生起確率ξ_iの情報iを変調し，送信シンボルx_iとして送り出す．
2. 送信シンボルx_iを送った場合に，受信機で測定値aを得る条件付き確率$P(a|i)$は既知である．
3. 受信者は決定関数$\pi_j(a)$に基づいて受信シンボルy_jを決定する．ここで決定関数は次の条件を満足する．

$$0 \le \pi_j(a) \le 1, \quad \forall j, a,$$
$$\sum_{j=1}^{N} \pi_j(a) = 1, \quad \forall a \tag{2}$$

つまり，決定関数$\pi_j(a)$を用いて，送信シンボルx_iに対して受信シンボルy_jを決定する条件付き確率$P(j|i)$は次のように表される．

$$P(j|i) = \int_{a \in A} \pi_j(a) p(a|i)\,\mathrm{da} \tag{3}$$

ただし，Aは測定値a全体からなる集合である．

4. 受信者は決定した受信シンボルy_jをもとにjを得る．
5. 決定関数$\pi_j(a)$を最適化することにより，誤り率P_eを最小化できる．

2.1 ベイズ決定規範

ベイズ決定規範は，送信シンボルの生起確率$\{\xi\}$を受信者が知っている場合に，誤り率P_eを最小にする決定関数$\{\pi(a)\}$を定める規範である．

$$P_{e,\mathrm{B}} = \min_{\{\pi\}} P_e \tag{4}$$

$P_{e,\mathrm{B}}$はベイズ最適解とよばれる．

新たに測定値全体にわたって定義される関数$\Gamma(a)$を次式で定義する．この関数$\Gamma(a)$は，aを変化させていったときに，最大となる$\xi_j p(a|j)$を返すので，もっとも送信された可能性が高い信号に決定することを意味している．

$$\Gamma(a) = \max_j \xi_j p(a|j) \tag{5}$$

これを用いて，最適な決定関数$\pi_j(a)$の必要十分条件は次のように表される．

$$\left(\Gamma(a) - \xi_j p(a|j)\right) \pi_j(a) = 0, \quad \forall j \tag{6}$$

$$\Gamma(\mathrm{a}) - \xi_j p(a|j) \ge 0, \quad \forall j \tag{7}$$

ただし，(6)は，(5)の要請による．このとき，ベイズ最適解は，次のように表される．

$$P_{e,\mathrm{B}} = 1 - \int_{a \in A} \Gamma(a)\,\mathrm{da} \tag{8}$$

3. 量子信号検出理論

従来の信号検出理論では，測定値aを得る条件付き確率$\{p(a|i)\}$が受信者側において既知であり，決定関数$\pi_j(a)$を最適化することにより誤り率P_eを最小化した．一方，量子通信システムにおいては，条件付き確率$\{P(a|i)\}$の代わりに，受信者側が受け取る信号量子状態$\{\rho_i\}$とその生起確率$\{\xi_i\}$が既知パラメータとして与えられる．そして，測定過程と決定過程は，決定作用素Π_jで表され，これは POVM の要素である．条件付き確率$\{p(a|i)\}$が既知でない理由は，決定作用素の最適化が，測定する物理量も変化させるため，測定結果として予測される条件付き確率$\{p(a|i)\}$も変化するからである．

以下に，量子通信システムの数学的モデルを示す[7]．

1. 送信者は，送りたい生起確率ξ_iの情報iを量子変調し，信号量子状態$\rho_i^{(in)}$として送り出す．
2. 信号量子状態$\rho_i^{(in)}$を送信した場合に，受信者が受け取る信号量子状態ρ_iは既知である．
3. 受信者は，決定作用素Π_jによって測定・決定過程（量子受信機）を表し，結果jを決定する．ここで決定作用素は，条件を満足する POVM の要素である．また，受信した信号量子状態ρ_iからjと決定する条件付き確率$P(j|i)$は，決定作用素Π_jを用いて次のように表され

る．

$$P(j|i) = Tr\rho_i \Pi_j \tag{9}$$

4. 決定作用素Π_jを最適化することによって，誤り率P_eを最小化できる．

3.1 量子ベイズ決定規範

量子ベイズ決定規範[5]は，受信者側において，受信信号量子状態ρ_iとその先験確率ξ_iが既知である場合に，誤り率P_eを最小にする最適な POVMΠを定める規範である．

$$P_{e,\mathrm{B}} = \min_{\Pi} P_e \tag{10}$$

そして，(10)を満足するような POVMΠの必要十分条件は，次のように与えられる．

$$\Pi_j\left(\xi_j\rho_j - \xi_i\rho_i\right)\Pi_i = 0, \qquad \forall i,j \tag{11}$$
$$\Gamma - \xi_i\rho_i \geq 0, \qquad \forall i \tag{12}$$

ここで

$$\Gamma = \sum_i \xi_i \, \Pi_i \rho_i \tag{13}$$

であり，ラグランジュ作用素とよばれる．そして，量子ベイズ最適解は，次式で与えられる．

$$P_{e,\mathrm{B}} = 1 - Tr\Gamma \tag{14}$$

3.2 SRM

量子測定では最適の決定作用素を求めることで，量子最適受信機を構成することができるが，その最適決定作用素を求めることがとても困難である[6][9].

しかし，信号系が群をなしている場合，最適決定作用素は Square-Root Measurement(SRM) であることを，番らが証明した[9]．Y-00 の信号は，多値位相変調(PSK) 方式であり，PSK の信号は群をなしているので，最適決定作用素は SRM である．

ここで,SRM の定義を以下に示す.

量子状態信号$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_M\rangle$が線形独立であり，それぞれの信号の先験確率がすべて等しいとき，Square-Root measurement は次のように定義される．

$$\widehat{\Pi}_i = |\mu_i\rangle\langle\mu_i| \tag{15}$$

ここで，

$$|\mu_i\rangle = \hat{G}^{-1/2}|\psi_i\rangle \tag{16}$$

である．$\hat{G}$は，Gram 作用素といい，次のように定義される．

$$\hat{G} = \sum_{i=1}^{M} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{17}$$

SRM から誤り率を導出する詳細は参考文献[9]を参に述べられているため，ここでは割愛する．

4. DPSKの量子力学的表現

光通信の分野で扱われている DPSK は，無線通信のそれと同じで古典的な表現で扱われている．しかし，光通信で DPSK を扱うのであれば，量子力学的表現も可能である．ここでは，DPSK を量子力学的表現で示す．

従来の DPSK は，先行する信号の位相に対する相対的な位相差が情報となるので，送信側では，PSK とほぼ変わらず，変わるのは信号の絶対位相に情報をのせるのではなく，位相差に情報ののせるところだけである．そして，受信側は，一つ目の信号と二つ目の信号の相対的な位相差を測定し，その結果から情報を決定する．次は，二つ目の信号と三つ目の信号の相対位相を測定するという手順である．

量子力学的表現の為に，この手法を少しかえる．一つの情報$i, (i = 1,2,\dots,n)$を送信するために必ず 2 信号$S_i = \left\{s_i^{\mathrm{basis}}, s_i^{\mathrm{info}}\right\}$を用いて送信する．ここで，一つ目の信号は位相差を測定する基準を作るための信号とし，これを基準信号s_i^{basis}と呼ぶ．二つ目の信号を一つ目の信号と位相差(情報) を持つ信号とし，これを情報信号s_i^{info}と呼ぶ．よって，$n$bit の情報を送信するためには，$2n$個の信号を必要とする．

上記のようにすることで，本来一つの信号で送る情報を二つの信号で送るので，片方だけでは信号としての意味はなく，2 信号で一つの意味のある信号

と見なせる．そして，DPSK を量子力学的に表現する為に重要な条件は

1. 情報理論的には，二つの信号は関係を持っている
2. 量子力学的には，二つの量子状態は相関を持たない

となる．

この条件を満たすような量子状態は

$$|\Psi_i\rangle = |\psi_i^{\mathrm{basis}}\rangle \oplus |\psi_i^{\mathrm{info}}\rangle \tag{18}$$

となる．以下簡単のため$\oplus$を省略し，$|\psi_i^{\mathrm{basis}}\rangle|\psi_i^{\mathrm{info}}\rangle$と表す．

次に，式を測定するための新たな測定法を提案する．

5. 古典−量子ハイブリッド測定法の提案

今回提案する方法は，古典の信号検出理論と量子信号検出理論の両方を用いたハイブリッド測定法である．

また，今回想定している通信路は一般的な光ファイバで，損失と位相ノイズは存在するが，外的熱放射雑音はないものとしている．

一般的な量子通信理論では，信号がテンソル積状態で表現される場合，これを符号化と見なす．そして，測定法として，量子一括測定を行う．しかし，ここでは，量子一括測定ではなく，個別測定を行う．そして，個別測定を行うときに，$|\psi_i^{\mathrm{basis}}\rangle$をヘテロダイン受信機で，$|\psi_i^{\mathrm{info}}\rangle$を量子受信機でそれぞれ個別に測定する．

手順としては，

1. $|\psi_i^{\mathrm{basis}}\rangle$をヘテロダイン受信機で測定する
2. $|\psi_i^{\mathrm{basis}}\rangle$の測定結果を用いて基準位相を決める
3. 基準位相を元に$|\psi_i^{\mathrm{info}}\rangle$を量子受信機で測定する
4. 量子測定で得られた測定結果(位相差)から情報を測定する

ここで，問題となるのがヘテロダインでの測定結果から次の量子測定に移る際必要となる基準位相である．ヘテロダイン測定はもとより量子測定でも取り除くことのできない量子ノイズ(量子ゆらぎ) が存在する．量子ノイズが原因で，基準位相が一意に定まらないのである．基準位相が一意に定まらないと次に測る$|\psi_i^{\mathrm{info}}\rangle$が純粋状態でなく混合状態となり，混合状態の量子測定による評価はとても困難である．そこで，ヘテロダイン測定による量子ノイズについて注目してみる．

ヘテロダイン測定は，非可換量同時測定を行っている[8]．よって，ヘテロダイン測定を行ったときのコヒーレント光の位相と光子数の不確定性関係は

$$\Delta\theta^2\Delta n^2 = 1 \tag{19}$$

となる．上式から位相の対するノイズ$\Delta\theta^2$について求めると

$$\Delta\theta^2 = \frac{1}{\Delta n^2} \tag{20}$$

となる．今考えている光はコヒーレント光なのでΔn^2は，平均光子数$\langle n\rangle$となり上式は

$$\Delta\theta^2 = \frac{1}{\langle n\rangle} \tag{21}$$

となる．ここで$\Delta\theta$が十分小さければ位相に対するノイズは無視することができるので，基準位相が一意に決めることができる．

平均光子数を十分大きく設定し，通信路からの位相ノイズが全ての信号に対して同程度に作用するとした場合，基準位相を一意に決めることで，$|\psi_i^{\mathrm{info}}\rangle$は，今までの PSK 信号として考えることができる．

6. 具体例

ここでは，具体的に例を挙げ，提案している測定法を評価する．評価は，ビット誤り率(bit error rate:BER) を用いて評価する．比較対称として，全て古典の受信機を用いて測定した場合を考える．つまり，$|\psi_i^{\mathrm{basis}}\rangle$も$|\psi_i^{\mathrm{info}}\rangle$も古典の受信機で測定する場合と比較をする．

今回，平均光子数$\langle n\rangle = 10^5$として，位相に対するノイズをゼロとした．また，$|\psi_i^{\mathrm{basis}}\rangle$に対して$|\psi_i^{\mathrm{info}}\rangle$の平均光子数は，非常に小さい範囲で計算を行う(例えば 10 程度)．

以下に，バイナリ(Differential Binary Phase Shift Keying : DBPSK)と，4 値(Differential Quadrature Phase Shift Keying : DQPSK)と二つ具体例を挙げて評価をする．

6.1 DBPSK の場合

一般的に，バイナリの DPSK の場合，$|\psi_i^{\mathrm{basis}}\rangle$と$|\psi_i^{\mathrm{info}}\rangle$の位相差は0とπである．

信号$\{|\Psi_i\rangle\}$は

$$|\Psi_1\rangle = |\psi_1^{\text{basis}}\rangle|\psi_1^{\text{info}}\rangle = |\alpha\rangle|\alpha\rangle \tag{22}$$

$$|\Psi_2\rangle = |\psi_2^{\text{basis}}\rangle|\psi_2^{\text{info}}\rangle = |\alpha\rangle|-\alpha\rangle \tag{23}$$

とし，先験確率は等確率とする．

バイナリの場合，情報信号$|\psi_i^{\text{info}}\rangle$はホモダイン受信機で測定をおこなう．この時，ホモダインの誤り率は次式で与えられる．

$$P_{e,\text{Homo}} = \text{Erfc}\left[\sqrt{2|\alpha|^2}\right] \tag{24}$$

ただし，$\text{Erfc}[x]$は，補誤差関数であり．

$$\text{Erfc}[x] = \frac{1}{2\pi}\int_x^\infty \exp\left[-\frac{\tau^2}{2}\right]\mathrm{d}\tau \tag{25}$$

量子測定の誤り率は，SRM を用いて

$$P_{e,\text{SRM}} = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{2} \tag{26}$$

となる．ただし，$k = \langle\alpha|-\alpha\rangle = \exp[-2|\alpha|^2]$である．このとき，Gram 作用素の行列表現である Gram 行列は，

$$G = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

となる．

図 1 に，平均光子数に対する古典測定と量子測定の BER を示す．

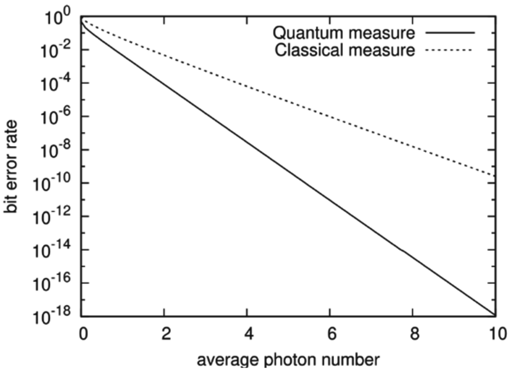

図 1　DBPSK の古典測定と量子測定の誤り率

6.1　DPSK の場合

4 値の DPSK の場合，$|\psi_i^{\text{basis}}\rangle$と$|\psi_i^{\text{info}}\rangle$の位相差は$0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$である．

信号$\{|\Psi_i\rangle\}$は

$$|\Psi_1\rangle = |\psi_1^{\text{basis}}\rangle|\psi_1^{\text{info}}\rangle = |\alpha\rangle|\alpha\rangle \tag{28}$$

$$|\Psi_2\rangle = |\psi_2^{\text{basis}}\rangle|\psi_2^{\text{info}}\rangle = |\alpha\rangle|\boldsymbol{i}\alpha\rangle \tag{29}$$

$$|\Psi_3\rangle = |\psi_3^{\text{basis}}\rangle|\psi_3^{\text{info}}\rangle = |\alpha\rangle|-\alpha\rangle \tag{30}$$

$$|\Psi_4\rangle = |\psi_4^{\text{basis}}\rangle|\psi_4^{\text{info}}\rangle = |\alpha\rangle|-\boldsymbol{i}\alpha\rangle \tag{31}$$

とし，先験確率は当確率とする．

4 値の場合，情報信号$|\psi_i^{info}\rangle$はヘテロダイン受信機で測定をおこなう．この時，ヘテロダインの誤り率は次式で与えられる．

$$P_{e,\text{Hete}} = 2\text{Erfc}\left[\sqrt{|\alpha|^2}\right] - \left(\text{Erfc}\left[\sqrt{|\alpha|^2}\right]\right)^2 \tag{32}$$

次に，量子測定の BER は，SRM を用いて

$$P_{e,\text{SRM}} = 1 - \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{4}\sqrt{\lambda_i}\right)^2 \tag{33}$$

となる[5]．ただし，

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{4}\langle\psi_i|\psi_k\rangle\left(\exp\left[\frac{2i\pi}{4}\right]\right)^{-(k-1)i} \tag{34}$$

である．このとき，Gram 行列は，

$$G = \begin{bmatrix} 1 & K_c + \boldsymbol{i}K_s & k^2 & K_c - \boldsymbol{i}K_s \\ K_c - \boldsymbol{i}K_s & 1 & K_c + \boldsymbol{i}K_s & k^2 \\ k^2 & K_c - \boldsymbol{i}K_s & 1 & K_c + \boldsymbol{i}K_s \\ K_c + \boldsymbol{i}K_s & k^2 & K_c - \boldsymbol{i}K_s & 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

ただし，$k = \exp[-|\alpha|^2]$，$K_c = k\cos[|\alpha|^2]$そして$K_s = k\sin[|\alpha|^2]$である．

図 2 に，平均光子数に対する古典測定と量子測定の BER を示す．

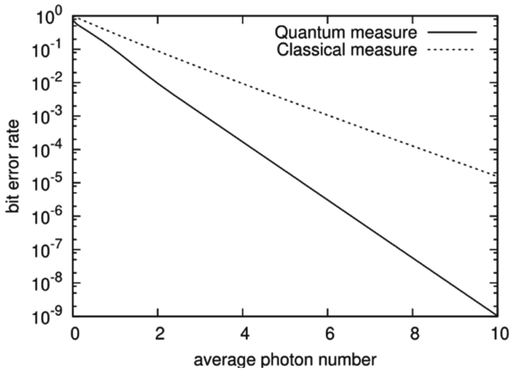

図 2　DQPSK の古典測定と量子測定の誤り率

7. まとめ

光通信分野で研究さている DPSK 信号の量子力学的な表現をすることで，量子測定の有効性を示すことができた．さらに，今回提案した古典-量子ハイブリッド測定法を用いることで，今までの古典測定より誤り率の観点でよくなることがわっかた．

しかし，今回示した具体例では，$|\psi_i^{\mathrm{info}}\rangle$が PSK と考えられるようにたくさんの制約を課している．そして，純粋状態にするために$|\psi_i^{\mathrm{basis}}\rangle$の平均光子数を 105 程度と見積もって位相に対するノイズをゼロとし計算を行ったが，これについても厳密な値を出す必要がある．また，DPSK 信号の量子力学的表現も理想的なものを考えているので，これをさらに一般的な信号へと拡張したときの，量子受信機の性能解析を今後の課題として残る．

最終的には，DPSK を完全量子で測定する方法についてもこれからの研究課題と残っている．さらに，光通信では研究が盛ん行われている多重化（CDMA，TDMA，OFDM など）を量子力学的に表現し，量子測定の提案などを行いたいと思う．

参考文献

[1]. P.Henry, “Lightwave primer” J. Qunatum Electron., Vol. QE-21, No.12, pp.1862-1879, 1985.
[2]. A.H.Gnauck, P.J.Winzer, “Optical Phase Shift Keyed Transmission” J. of Lightwave Technology., Vol.23, No.1, pp.115-130,2005.
[3]. N.Kikuchi, S.Sasaki, “Highly-sensitive Optical Multilevel Transmission of arbitrary QAM Signals with Direct Detection” J. of Lightwave Technology., Vol.28, No.1, pp.123-130,2010
[4]. P.R.Prucnal, M.A.Santro, T.R.Fab, “Spread spectrum fiber-optic local area network using optical processing” J. Lightwave Technology., Vol.LT-4, No.5, pp.547-554, 1986.
[5]. C.W. Helstrom, “Detection theory and quantum mechanics” Information and Control, vol.10, No.3, pp.254-291, 1967.
[6]. H.P.Yuen, R.S.Kennedy, and M.Lax, “Optimum Testing of Multiple Hypotheses in Quantum Detection Theory,” IEEE transactions on Information Theory, Vol.21, No.2, pp.125–134, 1975.
[7]. A.S.Holevo, “Statistical decision theory for quantum systems” Journal of Multivariate Analysis, vol.3, no.4, pp.337–394, 1973.
[8]. E.Arthurs, J.L.Kelly, “On the Simultaneous Measurement of a Pair of Conjugate Observables” Bell System Technical Journal, Vol.44, No.4, pp.725–729, 1965.
[9]. M.Osaki, O.Hirota, and M.Ban, “The maximum mutual information without coding for binary quantum state signals” journal of modern optics, Vol.45, No.2, pp.269–282, 1998.