MEMOIRS OF SHONAN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Vol. 51, No. 1, 2017

宇宙機の離散時間非線形姿勢制御

池田　裕一*

Discrete-time nonlinear attitude control of spacecraft

Yuichi IKEDA

Abstract:
This paper considers discrete-time nonlinear control for attitude control problem of spacecraft. To this end, the Euler approximation system is first derived. Then, a discrete-time nonlinear attitude controller so that the closed-loop system of the Euler approximation system is asymptotically stabilized is designed. Finally, the effectiveness of proposed control method is verified by numerical simulations.

KEY WORDS：Spacecraft, Attitude control, Discrete-time nonlinear control

要旨:
本論文では宇宙機の離散時間非線形姿勢制御問題について考える．はじめに，制御器設計のための宇宙機の離散時間モデル(Euler近似モデル)を導出する．次に，Euler近似システムの閉ループ系が漸近安定となる離散時間非線形姿勢制御器を設計する．最後に，数値シミュレーションにより提案手法の有効性を検証する．

キーワード：宇宙機，姿勢制御，離散時間非線形制御

1. はじめに

近年の天文・地球観測衛星においては，近年の天文観測・地球観測衛星においては，高速かつ大角度姿勢変更を伴うミッションが考えられている．このような宇宙機の回転運動は非線形であることから，非線形運動を考慮した姿勢制御系設計が必要となる．宇宙機の非線形姿勢制御問題は古くから研究が行われており，様々な制御手法が提案されている [1)-8)]．これらの研究は連続時間制御での枠組みであるが，近年では電子機器の発展により制御器としてディジタルコンピュータを用いるため，離散時間制御またはサンプル値制御の枠組みでの議論が必要である．非線形システムに対するサンプル値制御は，システムの離散化が困難であり制御系設計に関する研究は進展していなかったが，近年では Euler 近似モデルに基づいた手法が提案されており [9)-11)]，船舶の非線形サンプル値制御に応用されている [12), 13)]．宇宙機の非線形制御においても，バックステッピングによるサンプル値制御 [14), 15)]や筆者によりスライディングモード制御に基づいた離散時間制御手法 [16)]を提案している．しかし，文献 16)では，制御系の安定性は Euler 近似モデルに対してのみ保証しており，厳密な離散時間システムやサンプル値制御系としての安定性は保証していない．また，制御問題としては，状態変数すべてを零に漸近収束させるレギュレータ問題のみを扱っており，零ではない一定の目標値に追従するサーボ制御には対応できない．観測衛星のミッションで考えられている短時間に姿勢を変更するスイッチングマヌーバはサーボ制御問題と考えられる．

本稿では，高速かつ大角度姿勢変更を伴う宇宙機の離散時間非線形姿勢制御手法の構築を目的とし，文献 16）およびバックステッピングの考え方に基づいて，厳密な離散時間システムに対して安定性を保証し，かつ一定の目標値に追従するサーボ制御手法を提案する．

2. 非線形システムのサンプル値制御

次の連続時間非線形システムを考える．

*湘南工科大学　工学部　機械工学科　講師

$$\dot{x}(t)=f\big(x(t),u(t)\big),x(0)=x_0,f(0)=0 \qquad (1)$$

ここで，$x(t)\in \mathrm{R}^n$は状態，$u(t)\in \mathrm{R}^m$は制御入力である．式(1)はサンプラ（A/D 変換器）とゼロ次ホールダ（D/A 変換器）の間にあり，$u(t)$は区分的に一定，すなわち，

$$u(t)=u(kT)=:u(k),\forall t\in[kT,(k+1)T],k\in \mathrm{N}$$

で与えられると仮定する．ここで，$T>0$はサンプリング周期である．また，観測される状態は$x(t)\coloneqq x(kT)$となる．式(1)の厳密な離散時間モデルと Euler 近似モデルはそれぞれ次式となる．

$$x(k+1)=x(k)+\int_{kT}^{(k+1)T} f\big(x(s),u(k)\big)\,ds$$

$$=:F_T^e\big(x(k),u(k)\big) \qquad (2)$$

$$x(k+1)=x(k)+Tf\big(x(k),u(k)\big)$$

$$=:F_T^{Euler}\big(x(k),u(k)\big) \qquad (3)$$

式(2)，(3)の安定性について，文献 9)-11)にて以下の定理が示されている．

定義 1（半大域的実用漸近安定）　次の離散時間非線形システムを考える．

$$x(k+1)=F_T\big(x(k),u_T(x(k))\big) \qquad (4)$$

ここで，$x(k)\in \mathrm{R}^n$は状態，$u_T(x(k))\in \mathrm{R}^m$はある制御入力である．任意の正の実数の組$(D,\nu)$に対し，$\|x_0\|\le D$のとき各$T\in(0,T^*)$に関して式(4)の解が

$$\|x(k)\|\le \beta(\|x_0\|,kT)+\nu,\forall k\in \mathrm{N} \qquad (5)$$

を満たすような$T^*>0$とクラスKL関数βが存在するならば，式(4)は半大域的実用漸近安定（SPA 安定）であるといい，制御入力$u_T(x(k))$はシステム(4)を SPA 安定化するという．

定義 2　$\hat{T}>0$が与えられており，各$T\in(0,\hat{T})$に対して関数$V_T:\mathrm{R}^n\to \mathrm{R}$と入力$u_T:\mathrm{R}^n\to \mathrm{R}^m$が定義されているものとする．任意の正の実数の組$(\Delta,\delta)$に対し，$\max\{\|x\|,\|z\|\}\le\Delta$を満たす全ての$x,z$と$T\in(0,T^*)$に関して

$$\alpha_1(\|x\|)\le V_T(x)\le \alpha_2(\|x\|) \qquad (6)$$

$$V_T\Big(F_T\big(x,u_T(x)\big)\Big)-V_T(x)\le -T\alpha_3(\|x\|)+\delta \quad (7)$$

$$|V_T(x)-V_T(z)|\le L\|x-z\| \qquad (8)$$

$$\|u_T(x)\|\le M \qquad (9)$$

を満たす正の実数の組(T^*,L,M) $(T^*\le\hat{T})$とクラスK_∞関数$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$が存在するならば，組$(u_T,V_T)$は$F_T$（式(4)）に対する SPA 安定化の組という. さらに, $\delta=0$のとき, 式(6)-(9)が全てのxと$T\in(0,T^*)$に対して成り立つならば，組(u_T,V_T)はF_Tに対する大域的漸近安定化の組という.

定理 1　組(u_T,V_T)はF_T^{Euler}（式(3)）に対する SPA 安定化の組であれば，u_TはF_T^e（式(2)）を SPA 安定化する

定理 1 より，Euler 近似モデルF_T^{Euler}に対する SPA 安定化または大域的漸近安定化の組(u_T,V_T)を見つけることができれば，u_Tは厳密な離散時間モデルF_T^eを SPA 安定化する．

3. 宇宙機の運動方程式と離散時間モデル

姿勢表現に修正ロドリゲスパラメータ(MRP)を用いると，剛体宇宙機の回転に関する運動方程式は次式で記述される [2]．

$$\dot{\sigma}(t)=G\big(\sigma(t)\big)\omega(t) \qquad (10)$$

$$\dot{\omega}(t)=J^{-1}\{-\omega(t)^{\times}J\omega(t)+u(t)\} \qquad (11)$$

ここで，

$$G\big(\sigma(t)\big)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1-\|\sigma(t)\|^2}{2}I_3+\sigma(t)\sigma(t)^T+\sigma(t)^{\times}\right\}$$

であり，$\sigma(t)\in \mathrm{R}^3$［-］は MRP，$\omega(t)\in \mathrm{R}^3$［rad/s］は角速度，$u(t)\in \mathrm{R}^3$［Nm］は制御トルク，$J\in \mathrm{R}^{3\times3}$［kgm²］は慣性テンソル，$I_3$は 3 次の単位行列，$a^{\times}\in \mathrm{R}^{3\times3}$はベクトル$a\in \mathrm{R}^3$から生成される歪対称行列

$$a^{\times}=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}$$

である. ここで, 一定値の目標 MRP を$\sigma^d \in \mathrm{R}^3$ [-] とすると，相対姿勢を表す誤差 MRP $\sigma^e(t) \in \mathrm{R}^3$ [-] は

$$\sigma^e(t) = \frac{(1-\|\sigma^d\|^2)\sigma(t) - (1-\|\sigma(t)\|^2)\sigma^d + 2\sigma(t)^{\times}\sigma^d}{1+\|\sigma(t)\|^2\|\sigma^d\|^2 + 2(\sigma^d)^T\sigma(t)}$$

であり，$\sigma^e(t)$に関するキネマティクスは

$$\dot{\sigma}^e(t) = G\big(\sigma^e(t)\big)\omega(t) \tag{12}$$

と表される．式(12)，(10)の Euler 近似モデルは

$$\sigma^e(k+1) = \sigma^e(k) + TG\big(\sigma^e(k)\big)\omega(k) \tag{13}$$

$$\omega(k+1) = \omega(k) + TJ^{-1}\{-\omega(k)^{\times}J\omega(k) + u(k)\} \tag{14}$$

となる [14]．なお，以降では，$x(k)$をx_kと表記する．

4. 離散時間制御則の導出

バックステッピングの考え方に基づいて Euler 近似モデル(13)，(14)の平衡点$(\sigma_k^e, \omega_k) = (0,0)$を漸近安定化する制御則を導出する．次節以降の制御則の導出において用いる補題について示す.

補題 1　任意の$\sigma \in \mathrm{R}^3$に対して次式が成り立つ [2].

$$\sigma^T G(\sigma) = a\sigma^T, G(\sigma)^T G(\sigma) = a^2 I_3 \ \left(a = \frac{1+\|\sigma\|^2}{4}\right)$$

補題 2　2 次多項式$ax^2 + bx + c = 0\ (a,b,c \in \mathrm{R})$が異なる実数解$x = \beta, \gamma (\beta < \gamma)$を持つとき，$a > 0$ならば, $ax^2 + bx + c < 0$となる解は$\beta < x < \gamma$となる [18].

4. 1 仮想入力の設計

式(14)のω_kを仮想入力とし$\sigma_k^e \to 0\ (k \to \infty)$となる$\omega_k = \alpha_k$を求める．式(14)に対する Lyapunov 関数の候補を

$$V_1(k) = \|\sigma_k^e\|^2 \tag{15}$$

とする．式(15)の差分$\Delta V_1(k) = V_1(k+1) - V_1(k)$は，補題 1 より，

$$\Delta V_1(k) = {b_k}^2\|\omega_k\|^2 + 2b_k(\sigma_k^e)^T\omega_k \ (b_k = Ta_k)$$

となる．ここで,

$$\omega_k = \alpha_k = -\frac{2f_1}{b_k}\sigma_k^e \tag{16}$$

とすれば,

$$\Delta V_1(k) = -4f_1(1-f_1)\|\sigma_k^e\|^2 \tag{17}$$

となる．ここで，$f_1 \in \mathrm{R}$はフィードバックゲインである．補題 2 より，$\Delta V_1(k) < 0, \forall\sigma_k^e \neq 0$となる$f_1$の範囲は

$$0 < f_1 < 1 \tag{18}$$

となる．以上より，式(16)のf_1が式(18)を満たせば$\omega_k \to \alpha_k\ (k \to \infty)$のとき$\sigma_k^e \to 0$となる.

4. 2 制御則の導出

$\omega_k \to \alpha_k\ (k \to \infty)$となる$u_k$を求める．ここでは，$\omega_k$と$\alpha_k$の誤差を

$$z_k \coloneqq \omega_k - \alpha_k \tag{19}$$

と定義し, $z_k \to 0\ (k \to \infty)$とする$u_k$を求めることとする．式(19)より，$z_k$に関するダイナミクスは

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \omega_{k+1} - \alpha_{k+1} \\ &= \omega_k + TJ^{-1}\{-{\omega_k}^{\times}J\omega_k + u_k\} \\ &\quad + \frac{2f_1}{b_{k+1}}(\sigma_k^e + TG(\sigma_k^e)\omega_k) \end{aligned} \tag{20}$$

式(14)，(20)に対する Lyapunov 関数の候補を

$$V_2(k) = V_1(k) + f_2 b_k\|z_k\|^2 \tag{21}$$

とする．ここで，u_kを

$$u_k = {\omega_k}^{\times}J\omega_k + \frac{J}{T}\left[v_k - \omega_k - \frac{2f_1}{b_{k+1}}(\sigma_k^e + TG(\sigma_k^e)\omega_k)\right] \tag{22}$$

$$v_k = \frac{b_k z_k - (1-2f_1)\sigma_k}{b_{k+1}\sqrt{f_2}}$$

とする．ここで，$f_2 \in \mathrm{R}$はフィードバックゲインである．式(21)の差分$\Delta V_2(k) = V_2(k+1) - V_2(k)$は，補題 1 より，

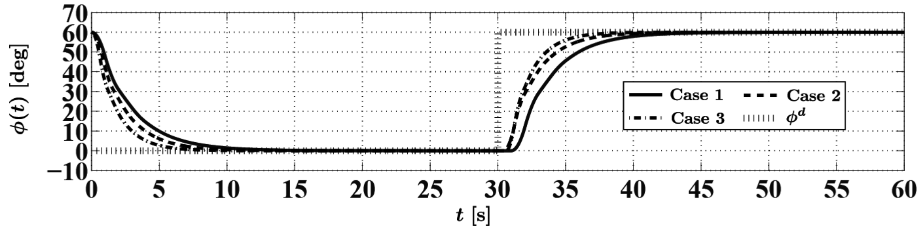

Fig.1 Time response of attitude angle (3-2-1 Euler angle)

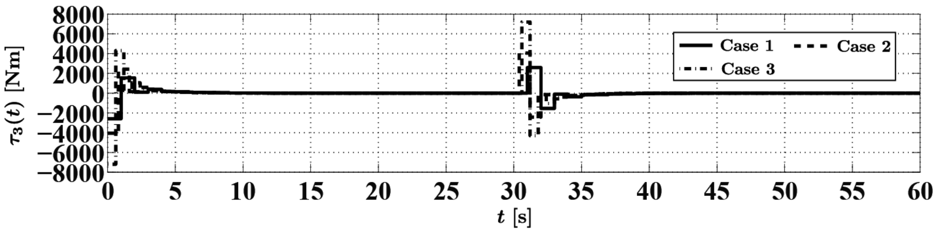

Fig.2 Time response of control torque

$$\Delta V_2(k) = (8f_1^2 - 8f_1 + 1)\|\sigma_k^e\|^2 - b_k^2(f_2 - 2)\|z_k\|^2 \quad (23)$$

となる．補題2より，$\Delta V_2(k) < 0, \forall \sigma_k^e \neq 0, \omega_k \neq 0$となる$f_1, f_2$の範囲は

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4} < f_1 < \frac{2+\sqrt{2}}{4} \quad (24)$$

$$2 < f_2 \quad (25)$$

となる．以上より，式(22)のf_1, f_2が式(24)，(25)を満たせば$(\sigma_k^e, z_k) \to (0,0)\ (k \to \infty)$，すなわち，$(\sigma_k^e, \omega_k) \to (0,0)\ (k \to \infty)$となる．以上をまとめると次の定理を得る．

定理2　Euler近似モデル(13)，(14)に制御入力(22)を施した閉ループ系において，f_1, f_2が式(24)，(25)を満たせば$(\sigma_k, \omega_k) \to (\sigma^d, 0)\ (k \to \infty)$となる．

また，Lyapunov関数$V_2(k)$（式(21)）と制御入力u_k（式(22)）は明らかに定義2の式(6)-(9)を満たすことから，組$(u_k, V_2(k))$はEuler近似モデル(13)，(14)に対するSPA安定化の組となる．したがって，次の定理を得る．

定理3　制御入力(22)は式(10)，(11)の厳密な離散時間モデルをSPA安定化する．

5. 数値シミュレーション

慣性テンソルJ，初期値σ_0, ω_0，および目標姿勢σ^dを

$$J = \mathrm{diag}\{7050, 2390, 6130\}$$

$$\sigma_0 = [0\ 0\ 0.268]^T, \omega_0 = [0\ 0\ 0]^T$$

$$\sigma^d = \begin{cases} [0\ 0\ 0]^T, & 0 \le t \le 30 \\ [0\ 0\ 0.268]^T, & 0 \le t \le 30 \end{cases}$$

（σ_0は3-2-1Euler角で表現すると$[\phi_0\ \theta_0\ \psi_0]^T = [60\ 0\ 0]^T$ [deg] である），フィードバックゲインf_1, f_2を

$$f_1 = 0.5, f_2 = 3.0$$

サンプリング時間Tを

$$\mathrm{Case1}: T = 1\ \ \mathrm{Case2}: T = 0.8\ \ \mathrm{Case3}: T = 0.6$$

としたときのシミュレーション結果をFigs.1～2に示す．Fig.1は$\sigma(t)$を3-2-1Euler角で表したときの姿勢の時間応答，Fig.1は制御トルクの時間応答である．

ただし，シミュレーションはロール角$\phi(t)$のスイッチングマヌーバであること，ピッチ角$\theta(t)$とヨー角$\psi(t)$は初期値と目標値が零であり変化がほとんどないことから，Fig.1 は$\phi(t)$のみ，Fig.2 はロール軸まわりのトルク$\tau_3(t)$（機体座標系での表示のため$\tau(t)$の 3 つ目の要素となる）のみ記載した．f_1, f_2が式(24)，(25)を満たしているので，いずれのサンプリング時間でも目標値に追従していることがわかる．また，Case1 のようにサンプリング時間が大きい場合，厳密な離散時間モデルと Euler 近似モデルの誤差が大きくなるため，Euler 近似モデルに対してのみ安定性を保証する制御器では制御系が不安定になることもある．しかし，提案手法では厳密な離散時間システムに対しても SPA 安定となることを保証しているので，サンプリング時間が大きい場合でも制御系が不安定になることはない．ただし，制御則(22)の(J/T)の項により，サンプリング時間が小さくなると制御入力が大きくなることもわかる．これは実際には起こりえない現象であるため制御則の改善が必要である．

6. おわりに

本稿では，高速かつ大角度姿勢変更を伴う宇宙機の離散時間非線形姿勢制御問題に対して，バックステッピングの考え方に基づいた目標値追従制御手法を提案し，数値シミュレーションにより有効性を検証した．今後の課題としては，制御入力の大きさがサンプリング周期に依存しない手法への拡張，サンプル値制御系としての安定性の保証が挙げられる．

参考文献

1) M. Dalsmo and O. Egeland : State Feedback H_∞ Control of a Rigid Spacecraft, IEEE Transactions on Automatic Control, 42-8, 1186/1189 (1997)

2) P. Tsiotras : Further Passivity Results for the Attitude Control Problem, IEEE Transactions on Automatic Control, 43-11, 1597/1600 (1998).

3) D. A. DeVon, R. J. Fuentes and J. L. Fausz : Passivity-Based Attitude Control for an Integrated Power and Attitude Control System using Variable Speed Control Moment Gyroscopes, Proc. of the 2004 American Control Conference, 1019/1024 (2004).

4) 池田，木田，長塩：動的出力フィードバックによる宇宙機のトラッキング制御(受動性に基づいたアプローチ)，日本機械学会論文集 C 編，75-759, 2933/2941 (2009).

5) Z. Meng, W. Ren and Z. You : Decentraized Cooperative Attitude Tracking Using Modified Rodriguez Parameters, Joint 48th IEEE CDC and 28th CCC, 853/858 (2009).

6) R. Schlanbusch, A. Loria, R. Kristiansen and P. J.　Nicklasson : PD+ Attitude Control of Rigid Bodies with Improved Performance, 49th IEEE Conf. Decision and Control, 7069/7074 (2010).

7) S. Liu, J. Sun and Z. Geng : Passivity-based Finite-time Attitude Control Problem, 9th Asian Control Conference, 1/6 (2013).

8) B. L. Cong, Z. Chen and X. D. Liu : Robust Attitude Control with Improved Transient Performance, 19th IFAC World Congress, 463/468 (2014)

9) D. Nešić, A. R. Teel and P. V. Kokotović : Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximation, Systems ¥& Control Letters, 38-4-5, 259/270 (1999)

10) D. S. Laila, D. Nešić and A. Astolfi : Sampled-Data Control of Nonlinear Systems, in Advanced Topics in Control Systems Theory, Lecture Notes in Control and Information Science, 91/137, Springer (2005)

11) D. Nešić and A. R. Teel : Stabilization of sampled-data nonlinear system via backstepping on their Euler approximate model, Automatica, 42-10, 1801/1808 (2006)

12) 片山：出力フィードバックによる船舶の非線形サンプル値安定化，第 8 回制御部門大会，CD-ROM (2008)

13) 片山：出力フィードバックによる劣駆動船舶のサンプル値直線軌道追従制御，第 13 回制御部門大会，CD-ROM (2012)

14) 片山，長塩，木田：宇宙機の非線形サンプル値制御，第 24 回誘導制御シンポジウム，97/100 (2007).

15) 西村，長塩，木田：プラクティカル安定性に基

づく宇宙機の離散トラッキング制御，第 53 回自動制御連合講演会，895/900 (2010)

16）池田：スライディングモード制御による宇宙機の非線形サンプル値制御，第 27 回誘導制御シンポジウム，97/100 (2010)

17）狼，富田，中須賀，松永：宇宙ステーション入門，161，東京大学出版 (2002)

18）古屋ほか：新版 基礎の数学，58，大日本図書 (1992)