MEMOIRS OF SHONAN
INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Vol. 43, No. 1, 2009

粘性が0に近づくときの2次元非圧縮流の収束の速さについての例

菊 地 慶 祐*

An Example about Rates of the Convergence of Motions of the Two-dimensional Incompressible Fluids as Viscosity goes to 0

Keisuke Kikuchi*

Under the condition that the initial vorticity b_0 satisfies $b_0(\boldsymbol{x})=b_0(|\boldsymbol{x}|)$ and $b_0(|\boldsymbol{x}|)=\mathrm{O}(|\boldsymbol{x}|^{-\alpha})$ $(0\leqq\alpha<1)$ *as* $|\boldsymbol{x}|\to 0$, we prove solutions of 2 dim. Navier-Stokes equations converge solutions of 2 dim. Euler equations with rates of $\nu^{\frac{1-\alpha}{2}}$ as the viscosity ν goes to 0. At the time of $\alpha=0$, the above rate of the convergence becomes in particular the necessary condition.

1. は じ め に

この小論では，粘性係数$\nu(\nu>0)$の2次元 Navier–Stokes 方程式の初期値問題

$$(1.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_\nu}{\partial t}-\nu\triangle\boldsymbol{u}_\nu+(\boldsymbol{u}_\nu\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_\nu+\nabla p_\nu=0, & \nabla\cdot\boldsymbol{u}_\nu=0 \\ \boldsymbol{u}_\nu\,|_{t=0}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

の解$\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x},t)=(u_\nu^{\,1}(\boldsymbol{x},t),\ u_\nu^{\,2}(\boldsymbol{x},t))$が，粘性係数$\nu\to 0$のとき，2次元 Euler 方程式

$$(1.2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t}+(\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_0+\nabla p_0=0, & \nabla\cdot\boldsymbol{u}_0=0 \\ \boldsymbol{u}_0\,|_{t=0}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

の解$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)=(u_0^{\,1}(\boldsymbol{x},t),\ u_0^{\,2}(\boldsymbol{x},t))$に収束する速さを，初期値$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$が

$$(1.3)\quad \begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})=b_0(|\boldsymbol{x}|),\ \text{かつ,} \\ &|\boldsymbol{x}|\to 0\ \text{のとき}\ b_0(|\boldsymbol{x}|)=\mathrm{O}(|\boldsymbol{x}|^{-\alpha})\ (0\leqq\alpha<1) \end{aligned}$$

をみたす場合に限って，考察しよう．

Navier–Stokes 方程式の解の Euler 方程式の解への収束については，今まで多くの研究が行われてきており，それぞれの条件の下で結果が得られている（例えば，[1]，[2] 等）．それらの中で最も優れたものの一つは，本学情報工学科水町氏が 1988 年に発表した [3] であろう；同氏が示した結果を収束する速さに関する部分に限って，少し簡略化して述べると次のとおりである．

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\in C^\alpha$ $(0<\alpha<1)$のとき，(1.1) の解$\boldsymbol{u}_\nu$，(1.2) の解$\boldsymbol{u}_0$に対して

$$(1.4)\quad \|\boldsymbol{u}_\nu(.,t)-\boldsymbol{u}_0(.,t)\|_\infty\leqq C(\nu t)^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

が成り立つ．

ここで，$\|f\|_\infty=\sup_{x\in R^2}f(\boldsymbol{x})$であり，$C^\alpha$は Hölder 連続関数の空間，すなわち

$$f\in C^\alpha \iff \|f\|_\infty+\sup_{x,y\in R^2,\,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty$$

である．

水町氏が示した上記の結果は，古典解に対する収束の速さについての最良評価であると思われる．ただし，評価式 (1.4) において，そのまま$\alpha\to 0$とすることはできない．なぜならば，[3] の証明は，$-\Delta$が$C^{2+\alpha}\to C^\alpha$で全単射であることに基づいており，よく知られているように，一般には，$-\Delta$は，$C^2\to C$で全単射とはならないからである．

この小論では，仮定 (1.3) の条件下では，

$$(1.5)\quad \|\boldsymbol{u}_\nu(.,t)-\boldsymbol{u}_0(.,t)\|_\infty\leqq C(\nu t)^{\frac{1-\alpha}{2}}\quad (0\leqq\alpha<1)$$

* 電気電子工学科准教授
平成 20 年 11 月 5 日受付

が成り立つこと，とくに，$\alpha=0$ の場合については，(1.5) が最良評価であることを示そう．

改めて，得られた結果を述べると

定理

2次元 Navier–Stokes 方程式，2次元 Euler 方程式の初期値 $a(\boldsymbol{x})$ が，(1.3) および

(1.6)　$b_0(r)=0 \quad (r>1)$

をみたすとき，(1.1) の解 $\boldsymbol{u}_\nu$，(1.2) の解 $\boldsymbol{u}_0$ に対して，粘性係数に関する評価式 (1.5) が成り立つ．とくに，$\alpha=0$ の場合には，(1.5) が最良評価である．

注　簡単のために，初期渦の台は有界であると仮定したが，(1.6) を $\int_0^\infty |b_0(r)|rdr<\infty$ で置き換えても定理は成立する．

2.　(1.1)，(1.2) の解の構成

(1.1), (1.2) の両辺に rot を作用させて，それぞれの渦方程式が得られる．

$$\text{(2.1)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial w_\nu}{\partial t}-\nu\Delta w_\nu+\boldsymbol{u}_\nu\cdot\nabla w_\nu=0, \quad w_\nu(\boldsymbol{x},0)=b_0(|\boldsymbol{x}|) \\ \nabla\cdot u_\nu=0, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_\nu=w_\nu \end{cases}$$

$$\text{(2.2)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial w_0}{\partial t}+\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla w_0=0, \quad w_0(\boldsymbol{x},0)=b_0(|\boldsymbol{x}|) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_0=0, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_0=w_0, \end{cases}$$

まず，渦方程式 (2.1) の解を構成しよう．そのために，次の熱方程式と楕円型方程式の対

$$\text{(2.3a)} \quad \frac{\partial w}{\partial t}-\nu\triangle w=0, \quad w(\boldsymbol{x},0)=b_0(|\boldsymbol{x}|)$$

$$\text{(2.3b)} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=w$$

の解を求めよう．

(2.3a) の解 $w=w(\boldsymbol{x},t)$ は，熱核ポテンシャルを用いて

$$w(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi\nu t}e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4\nu t}}b_0(|\boldsymbol{y}|)dy_1dy_2$$

で求められる．

さらに，極座標変換：$\boldsymbol{x}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$，$\boldsymbol{y}=(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$を行って，

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{x},t)&=\frac{1}{4\pi\nu t}\int_0^\infty\left\{\int_0^{2\pi}e^{-\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\phi-\theta)}{4\nu t}}d\phi\right\}b_0(\rho)\rho d\rho \\ &=\frac{1}{4\pi\nu t}e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\int_0^\infty\left\{\int_0^{2\pi}e^{\frac{r\rho\cos\phi}{2\nu t}}d\phi\right\}e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}b_0(\rho)\rho d\rho \end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\frac{r\rho}{2\nu t}\cos\phi}d\phi=\boldsymbol{I}_0\left(\frac{r\rho}{2\nu t}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m\,!)^2}\left(\frac{r\rho}{4\nu t}\right)^{2m}$$

ただし，$\boldsymbol{I}_0(z)$ は0次変形 Bessel 関数

を用いて，

$$\text{(2.4)} \quad \begin{aligned} w(\boldsymbol{x},t)=e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4\nu t}}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m\,!)^2}\left(\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4\nu t}\right)^m \\ &\times\int_0^\infty\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}b_0(\rho)\frac{\rho}{2\nu t}d\rho \end{aligned}$$

が得られる．

すなわち，熱方程式 (2.3a) の初期値が $r=|\boldsymbol{x}|$ の関数であるとき，解 $w(\boldsymbol{x},t)$ も r の関数：

$$w(\boldsymbol{x},t)=w(r,t)$$

であることがわかる．

さらに，(2.3b) の解 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ は，$-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=w$ の解 $\Phi=\Phi(r,t)$ を用いて

$$\text{(2.5)} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\nabla^\perp\Phi&=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) \\ &=\left(\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r,t)\frac{x_2}{r}, -\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r,t)\frac{x_1}{r}\right) \\ &=\left(-\frac{x_2}{r^2}, \frac{x_1}{r^2}\right)\int_0^r sw(s,t)ds \end{aligned}$$

で表される．

このとき，(2.4)，(2.5) の解の対 $\{w, \boldsymbol{u}\}$ は

$$\text{(2.6)} \quad \boldsymbol{u}\cdot\nabla w=0$$

をみたすことが，w が微分可能な場合には容易にわかる．実際，

$$\nabla w=\left(\frac{\partial}{\partial r}w(r,t)\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial r}w(r,t)\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)=\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}w(r,t)$$

であるから，(2.5) と合わせて (2.6) が得られる．

よって，線形微分方程式の対 (2.3a)，(2.3b) の解 (2.4)，(2.5) はそれぞれ渦方程式 (2.1)，Navier–Stokes 方程式 (1.1) の解となっている．

同様に，$w_0(\boldsymbol{x},t)=w_0(|\boldsymbol{x}|,t)$ のとき，(2.3b) の解 (2.5) は (2.6) をみたすから，

(2.7) $w_0(\boldsymbol{x}, t) = b_0(|\boldsymbol{x}|)$

は，渦方程式 (2.2) の解（定常解）であり，さらに，Euler 方程式 (1.2) の解は

(2.8) $$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}, t) = \left(-\frac{x_2}{r^2}, \frac{x_1}{r^2}\right)\int_0^r s b_0(s) ds$$

で与えられることがわかる．

注 $\alpha = 0$ の場合については，解の一意性から，渦方程式 (2.2) の解は，定常解 (2.7) に限られるが，一方，$\alpha > 0$ の場合については，解の一意性が成立するかどうかは未知であり，渦方程式 (2.2) の解が定常解 (2.7) に限られるかどうかはわからない．

さらに，

$$e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)^m = 1$$

$$\frac{1}{m!}\int_0^{\infty}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\frac{\rho}{2\nu t}d\rho = \frac{1}{m!}\int_0^{\infty}\xi^m e^{-\xi}d\xi = 1$$

を用いて，w_0 は

$$w_0(\boldsymbol{x}, t) = e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)^m b_0(r)\frac{1}{m!} \times\int_0^{\infty}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\frac{\rho}{2\nu t}d\rho$$

と表されるから，(2.8) は

(2.9) $$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}, t) &= \left(-\frac{x_2}{r^2}, \frac{x_1}{r^2}\right)\frac{1}{2\nu t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\\ &\times\int_0^{\infty}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m s e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}ds\frac{1}{m!}\int_0^r\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}b_0(\rho)\rho d\rho\end{aligned}$$

と書き換えられる．

よって，(2.4)，(2.5)，および，(2.9) から

(2.10) $$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}, t) &= \left(-\frac{x_2}{r^2}, \frac{x_1}{r^2}\right)\frac{1}{2\nu t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\\ &\times\int_0^r e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m s ds\frac{1}{m!}\int_r^{\infty}e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m b_0(\rho)\rho d\rho\\ &-\left(-\frac{x_2}{r^2}, \frac{x_1}{r^2}\right)\frac{1}{2\nu t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\\ &\times\int_r^{\infty}e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m s ds\frac{1}{m!}\int_0^r e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m b_0(\rho)\rho d\rho\end{aligned}$$

が成り立つ．

3. 証明の準備

ここでは，定理の証明に必要な補題を準備しておく．

補題 1

$a, b > 0$，$\dfrac{1}{2} < \beta \leqq 1$ とする．このとき，

(3.1) $$\begin{aligned}&e^{a+b}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_b^{\infty}e^{-\xi}\xi^m d\xi\frac{1}{m!}\int_0^a e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta\\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\beta}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2(n+\beta)}(ab)^{\frac{2n+\beta}{2}}\\ &\quad+\frac{1}{\beta}(ab)^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1+\beta}{2}}\frac{1}{n!(n+1)!}(ab)^{\frac{2n+\beta}{2}}\right.\\ &\quad\left.+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2+\beta}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)!}(ab)^{\frac{2n+1+\beta}{2}}\right\}\\ &\quad+\frac{1}{\beta}\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k-2+\beta}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{a}{b}\frac{1}{(n+k)!}\right.\\ &\quad\left.-\frac{\Gamma(n+1+\beta)}{(n+1)!\,\Gamma(n+k+\beta)}\right\}(ab)^{\frac{2n+k+\beta}{2}}\end{aligned}$$

従って，とくに，$a = b$ のとき

(3.2) $$\begin{aligned}&e^{2a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_a^{\infty}e^{-\xi}\xi^m d\xi\frac{1}{m!}\int_0^a e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2(n+\beta)}a^{2n+\beta}\\ &\quad+\frac{a}{\beta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}a^{2n+\beta}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)!}a^{2n+1+\beta}\right\}\\ &\quad+\frac{1}{\beta}\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\\ &\quad\times\left\{\frac{1}{(n+k)!}-\frac{\Gamma(n+1+\beta)}{(n+1)!\,\Gamma(n+k+\beta)}\right\}a^{2n+k+\beta}\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明

部分積分を繰り返して

$$\frac{1}{m!}\int_b^{\infty}e^{-\xi}\xi^m d\xi = e^{-b}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}b^j$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m!}\int_0^a e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta\\ &= e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m!(m+\beta)(m+1+\beta)\cdots(m+k+\beta)}a^{\beta+m+k}\\ &= e^{-a}\frac{\Gamma(m+\beta)}{m!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1+\beta)}a^{k+\beta}\end{aligned}$$

が得られる．

よって，和をとる順序を交換して

(3.1) の左辺

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m+\beta)}{m!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1+\beta)}a^{\beta+k}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}b^{j}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=n}^{k+n}\frac{\Gamma(m+\beta)}{m!}\right)\frac{1}{n!\,\Gamma(n+k+1+\beta)}a^{n+k+\beta}b^{n}\right)$$

が導かれる．

さらに，直接の計算で

$k=0$ のとき

$$\sum_{m=n}^{n+k}\frac{\Gamma(m+\beta)}{m!}=\frac{\Gamma(n+\beta)}{n!}$$

$k\geqq1$，$n=0$ のとき

$$\sum_{m=n}^{n+k}\frac{\Gamma(m+\beta)}{m!}=\sum_{m=0}^{k}\frac{\Gamma(m+\beta)}{m!}=\frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(k+1+\beta)}{k!}$$

$k\geqq1$，$n\geqq1$ のとき

$$\sum_{m=n}^{n+k}\frac{\Gamma(m+\beta)}{m!}=\sum_{m=0}^{k}\frac{\Gamma(n+m+\beta)}{(n+m)!}$$

$$=\frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(n+k+1+\beta)}{(n+k)!}-\frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(n+\beta)}{(n-1)!}$$

が確かめられるから，

(3.1) の左辺

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\beta)}{n!}\frac{1}{\Gamma(n+1+\beta)}a^{n+\beta}\frac{1}{n!}b^{n}$$

$$+\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1+\beta)}{k!}\frac{1}{\Gamma(k+1+\beta)}a^{k+\beta}$$

$$+\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+k+1+\beta)}{(n+k)!}\frac{1}{\Gamma(n+k+1+\beta)}$$

$$\times a^{n+k+\beta}\frac{1}{n!}b^{n}$$

$$-\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\beta)}{(n-1)!}\frac{1}{\Gamma(n+k+1+\beta)}a^{n+k+\beta}\frac{1}{n!}b^{n}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\beta}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^{2}(n+\beta)}(ab)^{\frac{2n+\beta}{2}}+\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k+\beta}{2}}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!\,n!}(ab)^{\frac{2n+k+\beta}{2}}$$

$$-\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k+\beta}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n-1)!}\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+k+1+\beta)}(ab)^{\frac{2n+k+\beta}{2}}$$

ここで，右辺第3番目の項において，$(n,k+2)\to(n+1,k)$ で置き換えればよい．［証明終］

補題 2

$a>0$，$\dfrac{1}{2}<\beta\leqq1$ のとき，

(3.3)　$$\frac{1}{m!}\int_{a}^{\infty}e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta\leqq\Gamma(\beta)e^{-a}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}a^{k}$$

が成り立つ．

証明

$0<a<1$ のとき

$$\frac{1}{m!}\int_{a}^{\infty}e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta$$

$$=\frac{1}{m!}\int_{0}^{\infty}e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta-\frac{1}{m!}\int_{0}^{a}e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta$$

$$=\frac{1}{m!}\Gamma(m+\beta)-e^{-a}\frac{\Gamma(m+\beta)}{m!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1+\beta)}a^{k+\beta}$$

$$=\frac{1}{m!}\Gamma(m+\beta)e^{-a}\left\{e^{a}-\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1+\beta)}a^{k+\beta}\right\}$$

ここで，$0<a<1$，$k\geqq0$ のとき

$$\frac{1}{(k+1)!}a^{k+1}\leqq\frac{1}{\Gamma(k+1+\beta)}a^{k+\beta}$$

が成り立つから，

$$e^{a}-\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1+\beta)}a^{k+\beta}\leqq e^{a}-\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}a^{k+1}=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}a^{k}$$

よって，

$$\frac{1}{m!}\int_{a}^{\infty}e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta$$

$$\leqq\frac{1}{m!}\Gamma(m+\beta)e^{-a}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}a^{k}\leqq\Gamma(\beta)e^{-a}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}a^{k}$$

また，$a\geqq1$ のとき，$\eta\geqq a$ に対して，$\eta^{m-1+\beta}\leqq\eta^{m}$ であるから，

$$\frac{1}{m!}\int_{a}^{\infty}e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta\leqq\frac{1}{m!}\int_{a}^{\infty}e^{-\eta}\eta^{m}d\eta$$

$$\leqq e^{-a}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}a^{k}$$

以上から，$\dfrac{1}{2}<\beta\leqq1$ のとき，(3.3) が得られる．ただし，$\Gamma(\beta)>1$ を用いた．［証明終］

補題３

$I_\lambda(\sigma)\,(\lambda > -\dfrac{1}{2})$ を λ 次の変形Bessel関数とするとき，定数 $c_{1\lambda}$, $c_{2\lambda}$ が存在して

(3.4) $\dfrac{c_{1\lambda}}{\sqrt{\sigma}} \leqq e^{-\sigma} I_\lambda(\sigma) \leqq \dfrac{c_{2\lambda}}{\sqrt{\sigma}}$（ただし，左側の不等式は $\sigma \geqq 1$ のとき）が成り立つ．

証明

変形 Bessel 関数の積分表示（例えば，[4]，[5] 参照）

$I_\lambda(\sigma) = k_\lambda \sigma^\lambda \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-\sigma t} dt$（ただし，$k_\lambda = \dfrac{1}{2^\lambda \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}$）において，右辺の積分を，

$1+t=\dfrac{1}{\sigma}s$ で変数変換して

$$e^{-\sigma} I_\lambda(\sigma) = \frac{k_\lambda}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{2\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} \left(2-\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds$$

が成り立つ．

i）$\lambda > \dfrac{1}{2}$ のとき

$0 \leqq s \leqq 2\sigma$ で，$\left(2-\dfrac{s}{\sigma}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} \leqq 2^{\lambda-\frac{1}{2}}$ であるから

$$e^{-\sigma} I_\lambda(\sigma) \leqq \frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}} k_\lambda}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{2\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds$$

$$\leqq \frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}} k_\lambda}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\infty} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma}}$$

一方，$\sigma \geqq 1$ のとき

$$e^{-\sigma} I_\lambda(\sigma) \geqq \frac{k_\lambda}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds \geqq \frac{k_\lambda}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{1} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds$$

$$\geqq \frac{k_\lambda}{e\sqrt{\sigma}} \int_0^{1} s^{\lambda-\frac{1}{2}} ds = \frac{k_\lambda}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) e\sqrt{\sigma}}$$

$$= \frac{1}{2^\lambda \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right) e\sqrt{\sigma}}$$

ii）$-\dfrac{1}{2} < \lambda \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\int_0^{2\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} \left(2-\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds$$

$$= \int_0^{\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} \left(2-\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds + \int_\sigma^{2\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} \left(2-\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds$$

ここで，右辺第２項において，$2\sigma - s \to s$ で変数変換すると

$$\int_\sigma^{2\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} \left(2-\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds = \int_0^{\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} \left(2-\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-2\sigma+s} ds$$

$0 \leqq s \leqq \sigma$ で，$2^{\lambda-\frac{1}{2}} \leqq \left(2-\dfrac{s}{\sigma}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} \leqq 1$，$e^{-2\sigma+s} \leqq e^{-s}$ であるから

右辺第１項

$$\leqq \int_0^{\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds \leqq \int_0^{\infty} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds = \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$$

右辺第２項

$$\leqq \int_0^{\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-2\sigma+s} ds \leqq \int_0^{\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds \leqq \int_0^{\infty} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds$$

$$= \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$$

一方，$\sigma \geqq 1$ のとき

右辺第１項

$$\geqq 2^{\lambda-\frac{1}{2}} \int_0^{\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds \geqq 2^{\lambda-\frac{1}{2}} \int_0^{1} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds$$

$$\geqq \frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}}}{e} \int_0^{1} s^{\lambda-\frac{1}{2}} ds \geqq \frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}}}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) e}$$

右辺第２項

$$\geqq 2^{\lambda-\frac{1}{2}} \int_0^{\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-2\sigma+s} ds \geqq 2^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-2\sigma} \int_0^{1} s^{\lambda-\frac{1}{2}} ds$$

$$\geqq \frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}}}{e^{2\sigma}} \int_0^{1} s^{\lambda-\frac{1}{2}} ds \geqq \frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}}}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) e^{2\sigma}}$$

よって，

$$\frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}}}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) e} \leqq \int_0^{2\sigma} s^{\lambda-\frac{1}{2}} \left(2-\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-s} ds \leqq 2\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つことがわかる．ただし，左辺の不等式は $\sigma \geqq 1$ のときに成立する．

これより，$-\dfrac{1}{2} < \lambda \leqq \dfrac{1}{2}$ の場合についても (3.4) が成り立つことが導かれる．［証明終］

4.　$\alpha=0$ の場合の定理の証明

(2.10) より

$$|\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|$$

$$\leqq \frac{1}{2\nu t}\cdot\frac{1}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}\int_0^r e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m sds\frac{1}{m\,!}$$

(4.1)
$$\times\int_r^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m|b_0(\rho)|\rho d\rho+\frac{1}{2\nu t}\cdot\frac{1}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}$$

$$\times\int_r^\infty e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m sds\frac{1}{m\,!}\int_0^r e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m|b_0(\rho)|\rho d\rho$$

が成り立つ．

$r\leqq 1$，$r>1$ の場合に分けて証明する．

i）　$r\leqq 1$ のとき

(4.1) より

$$|\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|\leqq\frac{1}{\nu t}\cdot\frac{||b_0||_\infty}{r}e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}$$

$$\times\int_r^\infty e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m sds\frac{1}{m\,!}\int_0^r e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m\rho d\rho$$

$$=\frac{4\nu t||b_0||_\infty}{r}e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}\int_{\frac{r^2}{4\nu t}}^\infty e^{-\xi}\xi^m d\xi\frac{1}{m\,!}$$

$$\times\int_0^{\frac{r^2}{4\nu t}} e^{-\eta}\eta^m d\eta$$

右辺に，補題1 (3.2)（$\beta=1$ の場合である）を適用して，

$$|\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|\leqq\frac{4\nu t||b_0||_\infty}{r}e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!(n+1)!}\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)^{2n+1}+||b_0||_\infty re^{-\frac{r^2}{2\nu t}}$$

$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!(n+1)!}\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!(n+2)!}\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)^{2n+2}\right\}$$

$$=\frac{4\nu t||b_0||_\infty}{r}e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}\left\{I_1\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)+\frac{r^2}{4\nu t}\left(I_1\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)+I_2\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)\right)\right\}$$

が得られる．

さらに，変形 Bessel 関数の漸化式：$I_1(2\sigma)=\sigma\{I_0(2\sigma)-I_2(2\sigma)\}$ を代入して

(4.2)
$$|\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|\leqq||b_0||_\infty re^{-\frac{r^2}{2\nu t}}\left\{I_0\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)+I_1\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)\right\}$$

が導かれる．

ii）　$r>1$ のとき

仮定 (1.6) から，$\rho\geqq r>1$ において $b_0(\rho)=0$ であるから，

$$\int_r^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m|b_0(\rho)|\rho d\rho=0$$

よって，(4.1) は

$$|\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|\leqq\frac{1}{2\nu t}\cdot\frac{1}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}$$

$$\times\int_r^\infty e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m sds\frac{1}{m\,!}\int_0^1 e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m|b_0(\rho)|\rho d\rho$$

$$\leqq\frac{1}{2\nu t}\cdot\frac{||b_0||_\infty}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}\int_r^\infty e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m sds\frac{1}{m\,!}$$

$$\times\int_0^1 e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m\rho d\rho$$

と書き換えられる．

このとき，補題1 (3.1) を適用して，i) の場合と同様な計算により

$$|\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|\leqq\frac{2\nu t||b_0||_\infty}{r}e^{-\frac{r^2+1}{4\nu t}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}$$

$$\times\int_{\frac{r^2}{4\nu t}}^\infty e^{-\xi}\xi^m d\xi\frac{1}{m\,!}\int_0^{\frac{1}{4\nu t}} e^{-\eta}\eta^m d\eta$$

$$=\frac{2\nu t||b_0||_\infty}{r^2}e^{-\frac{r^2+1}{4\nu t}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!(n+1)!}\left(\frac{r}{4\nu t}\right)^{n+1}\right.$$

$$+\frac{r}{4\nu t}\left\{\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!(n+1)!}\left(\frac{r}{4\nu t}\right)^{2n+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!(n+2)!}\left(\frac{r}{4\nu t}\right)^{2n+2}\right\}$$

$$\left.+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{r^{k-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\frac{1}{(n+k)!}\left(\frac{1}{r}-1\right)\left(\frac{r}{4\nu t}\right)^{2n+k+1}\right]$$

$$\leqq\frac{2\nu t||b_0||_\infty}{r^2}e^{-\frac{r}{2\nu t}}\left\{I_1\left(\frac{r}{2\nu t}\right)+\frac{r}{4\nu t}\left(I_1\left(\frac{r}{2\nu t}\right)+I_2\left(\frac{r}{2\nu t}\right)\right)\right\}$$

さらに，変形 Bessel 関数の漸化式：$I_1(2\sigma)=\sigma\{I_0(2\sigma)-I_2(2\sigma)\}$ を代入して

$$|\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|$$

(4.3)
$$\leqq\frac{1}{2r}||b_0||_\infty e^{-\frac{r}{2\nu t}}\left\{I_0\left(\frac{r}{2\nu t}\right)+I_1\left(\frac{r}{2\nu t}\right)\right\}$$

を得る．

このとき，(4.2)，(4.3) に，補題3を適用して，$\alpha=0$ のとき，

(4.4)　$||\boldsymbol{u}_{\nu}(.,t)-\boldsymbol{u}_0(.,t)||_{\infty}\leqq C||b_0||_{\infty}(\nu t)^{\frac{1}{2}}$

が成り立つことがわかる．

次に，(4.4) が最良評価であることを示すために，初期値 b_0 として次の特別な場合を考えよう．

(4.5)　$b_0(r)=\begin{cases}1 & r<1\\ 0 & r\geqq 1\end{cases}$

このとき，(2.10) より，$r=1$ をみたす点 x において

$$\boldsymbol{u}_{\nu}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)=(x_2,\ -x_1)\frac{1}{2\nu t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}$$
$$\times\int_1^{\infty}e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m sds\frac{1}{m\,!}\int_0^1 e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m\rho d\rho$$

が成り立つことがわかる．

よって，(4.2) を導いた計算と同様にして，(3.2) および変形 Bessel 関数の漸化式を用いて

$$|\boldsymbol{u}_{\nu}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|=\frac{1}{2\nu t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}$$
$$\times\int_1^{\infty}e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m sds\frac{1}{m\,!}\int_0^1 e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m\rho d\rho$$
$$=2\nu te^{-\frac{1}{2\nu t}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}\int_{\frac{1}{4\nu t}}^{\infty}e^{-\xi}\xi^m d\xi\frac{1}{m\,!}\int_0^{\frac{1}{4\nu t}}e^{-\eta}\eta^m d\eta$$
$$=2\nu te^{-\frac{1}{2\nu t}}\left\{I_1\left(\frac{1}{2\nu t}\right)+\frac{1}{4\nu t}\left(I_1\left(\frac{1}{2\nu t}\right)+I_2\left(\frac{1}{2\nu t}\right)\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2\nu t}}\left\{I_0\left(\frac{1}{2\nu t}\right)+I_1\left(\frac{1}{2\nu t}\right)\right\}$$

従って，補題3から，$|\boldsymbol{x}|=1$ である点 $\boldsymbol{x}$ において

$$|\boldsymbol{u}_{\nu}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|\geqq C(\nu t)^{\frac{1}{2}}\quad\left(\nu t\leqq\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つことがわかる．

以上から，(4.4) と合わせて，$\alpha=0$ のとき，(1.5) が最良評価式であることが示された．

5.　$0<\alpha<1$ の場合の定理の証明

4. において，$\alpha=1$，$||b_0||_{\infty}<\infty$ の場合について，(1.5) を証明したので，一般性を失わずに

(5.1)　$b_0(r)=r^{-\alpha}\quad(r<1)$

であると仮定してよい．このとき，(2.10) より

$$|\boldsymbol{u}_{\nu}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|\leqq\frac{1}{2\nu tr}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}$$
$$\times\int_0^r e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m sds\frac{1}{m\,!}\int_r^{\infty}e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m\rho^{1-\alpha}d\rho$$

(5.2)
$$+\frac{1}{2\nu tr}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}\int_r^{\infty}e^{-\frac{s^2}{4\nu t}}\left(\frac{s^2}{4\nu t}\right)^m sds\frac{1}{m\,!}$$
$$\times\int_0^r e^{-\frac{\rho^2}{4\nu t}}\left(\frac{\rho^2}{4\nu t}\right)^m\rho^{1-\alpha}d\rho$$

が成り立つ．

$r<1$ の場合について，(1.5) が成り立つことを示す．(5.2) より

$$|\boldsymbol{u}_{\nu}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t)|\leqq\frac{1}{2\nu tr}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}2\nu t$$
$$\times\int_0^{\frac{r^2}{4\nu t}}e^{-\xi}\xi^m d\xi\frac{2^{1-\alpha}}{m\,!}(\nu t)^{1-\frac{\alpha}{2}}\int_{\frac{r^2}{4\nu t}}^{\infty}e^{-\eta}\eta^{m-\frac{\alpha}{2}}d\eta$$
$$+\frac{1}{2\nu tr}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}2\nu t\int_{\frac{r^2}{4\nu t}}^{\infty}e^{-\xi}\xi^m d\xi\frac{2^{1-\alpha}}{m\,!}(\nu t)^{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$\times\int_0^{\frac{r^2}{4\nu t}}e^{-\eta}\eta^{m-\frac{\alpha}{2}}d\eta$$

であるから，$1-\dfrac{\alpha}{2}=\beta\quad\left(\dfrac{1}{2}<\beta<1\right)$とおくと

右辺第１項 $J_1=\dfrac{2^{2\beta-1}}{r}(\nu t)^{\beta}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}$
$$\times\int_0^{\frac{r^2}{4\nu t}}e^{-\xi}\xi^m d\xi\frac{1}{m\,!}\int_{\frac{r^2}{4\nu t}}^{\infty}e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta$$

右辺第２項 $J_2=\dfrac{2^{2\beta-1}}{r}(\nu t)^{\beta}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}$
$$\times\int_{\frac{r^2}{4\nu t}}^{\infty}e^{-\xi}\xi^m d\xi\frac{1}{m\,!}\int_0^{\frac{r^2}{4\nu t}}e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta$$

が成り立つ．

まず，J_1 を評価しよう．補題 2 (3.3) を用いて

$$J_1\leqq\frac{2^{2\beta-1}}{r}(\nu t)^{\beta}e^{-2a}\Gamma(\beta)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j\,!}\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)^j\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k\,!}\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)^k$$

が成り立つことがわかる．よって，4i) の場合と同様な計算で

$$J_1\leqq 2^{2\beta-3}\Gamma(\beta)r(\nu t)^{\beta-1}e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}\left\{I_0\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)+I_1\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)\right\}$$

(5.3)
$$=2^{-1+\alpha}\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)r(\nu t)^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}\left\{I_0\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)+I_1\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)\right\}$$

が成り立つことがわかる．

次に，J_2 を評価しよう．補題1(3.2)より，$a>0$ に対して

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}\int_a^{\infty}e^{-\xi}\xi^m d\xi\frac{1}{m\,!}\int_0^a e^{-\eta}\eta^{m-1+\beta}d\eta$$

$$\leqq e^{-2a}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n\,!)^2(n+\beta)}a^{2n+\beta}\right.$$

$$\left.+\frac{a}{\beta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!(n+1)!}a^{2n+\beta}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!(n+2)!}a^{2n+1+\beta}\right\}\right]$$

が得られる．実際，

$$\frac{1}{(n+k)!}-\frac{\Gamma(n+1+\beta)}{(n+1)!\,\Gamma(n+k+\beta)}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+k)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(n+1+\beta)(n+2+\beta)\cdots(n+k-1+\beta)}\right)<0$$

より，(3.2)式右辺の第3項目 <0 となるからである．さらに，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n\,!)^2(n+\beta)}a^{2n+\beta}$$

$$+\frac{a}{\beta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!(n+1)!}a^{2n+\beta}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!(n+2)!}a^{2n+1+\beta}\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\beta)}{n\,!}\frac{1}{n\,!\,\Gamma(n+1+\beta)}a^{2n+\beta}$$

$$+\frac{a}{\beta}\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+k+\beta)}{(n+k)!}\frac{1}{n\,!\,\Gamma(n+k+\beta)}a^{2n+k-1+\beta}$$

$$\leqq\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\beta)\frac{1}{n\,!\,\Gamma(n+1+\beta)}a^{2n+\beta}$$

$$+\frac{a}{\beta}\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\beta)\frac{1}{n\,!\,\Gamma(n+k+\beta)}a^{2n+k-1+\beta}$$

$$\leqq\Gamma(\beta)I_\beta(2a)+\frac{a}{\beta}\Gamma(\beta)\{I_\beta(2a)+I_{1+\beta}(2a)\}$$

$$=\frac{a}{\beta}\Gamma(\beta)\{I_{\beta-1}(2a)+I_\beta(2a)\}$$

ただし，最後の等式では，変形Bessel関数の漸化式：$I_\beta(2a)=\dfrac{a}{\beta}\{I_{\beta-1}(2a)-I_{1+\beta}(2a)\}$ を代入した．

よって，

$$J_2\leqq\frac{2^{2\beta-1}\Gamma(\beta)}{\beta}2^{\beta-1}(\nu t)^{\beta-1}re^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\left\{I_{\beta-1}\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)+I_\beta\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)\right\}$$

(5.4)

$$=\frac{2^{2-\alpha}\Gamma\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2-\alpha}(\nu t)^{-\frac{\alpha}{2}}re^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\left\{I_{-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)+I_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{r^2}{2\nu t}\right)\right\}$$

(5.3)，(5.4)に補題3を適用して，$0<\alpha<1$ の場合についても(1.5)が成り立つことが示される．　［証明終］

参考文献

1) Golovkin, K. K., Vanishing viscosity in Cauchy's problem for hydrodynamical equations, Trudy Mat. Inst. Steklov **92** (1966), 31-49.

2) McGrath, F. J., Nonstationary plane flow of viscous and ideal fluids, Arch. Rational Mech. Anal. **27** (1963), 329-348.

3) Mizumachi, R., On convergence and rates of the convergence of motions of incompressible fluids in $\boldsymbol{R}^2$ as viscosity goes to 0, J. the Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, **35** (1988), 225-249.

4) Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions 2nd edition, Cambridge University Press (1944).

5) 森口繁一，宇田川銈久，一松信著　数学公式Ⅲ岩波書店（1960）．

湘南工科大学　電気電子工学科准教授　菊地慶祐
kikuchi@la.shonan-it.ac.jp