

空気の屈折率と電磁波の伝搬特性

中 西 順 一 郎*

On the Refractive Index of the Air and the Propagation
Characteristics of Electromagnetic Waves

Junichiro NAKANISHI*

In regard to the propagation of electromagnetic waves in inhomogeneous medium such as Ionosphere and Troposphere where the refractive index varies continuously, many researches are being made but the stress of these researches is put in the research of the reflection coefficient by figuring out the approximate estimates through the Maxwell's Equations or through Snell's law. Some researches are also being made by L. M. Brekhovskikh, K. G. Budden and V. L. Ginzburg and accurate solutions of reflection coefficient in the medium where the refractive index varies in semi-infinite region are being obtained, but there is still room for further study of the electromagnetic field. This work deals with the methods, by using plane wave approximation, of effective study of the effect of air temperature, atmospheric pressure and humidity of the air in which the refractive index varies with distance. This work is to solve by using Maxwell's Equations, the problems in connect with the electromagnetic field by dividing the electric field of linearly polarized wave to TE wave and TM wave components mutually orthogonal when the field propagates through the inhomogeneous medium where the refractive index varies in accordance with the coordinates. With this method, variation of the direction of millimeter wave and light wave propagation and polarization characteristics can be studied. This work shows the method of analysis of the electric field, magnetic field, pointing vectors and propagation direction of both TE wave and TM wave respectively. For this purpose, TE wave is being analyzed in case the permittivity due to the variation of refractive index varies linearly and TE wave and TM wave are being analyzed respectively in case the refractive index varies in exponential function form.

1. まえがき

電離層や対流圏などで、屈折率が連続的に変化する不均質な媒質中における電波の伝搬に関しては、多くの人々により研究されているが¹⁾²⁾、主として反射係数を求めることに重点を置き、Maxwell の方程式より近似的に計算したり、Snell の法則等により電波の伝搬路を求めている。屈折率が半無限の領域で変化する媒質の反射係数の厳密な解は、L. M. Brekhovskikh³⁾、K. G. Budden⁴⁾、V. L. Ginzburg⁵⁾ により求められているが、電界や磁界等については十分に検討はされていない。この論文では屈折率が距離と共に変化する空気中を、電磁波

が伝搬する場合の空気の温度、気圧、湿度の効果を考察するのに有効な取扱を、平面波近似により行う方法を述べている。

屈折率が位置の関数である不均質な媒質中を電磁波が伝搬する場合に、直線偏光の電界を互に直角方向の成分、TE 波と TM 波に分解し、Maxwell の方程式より電界磁界等に関する解を求めている。この計算により、ミリ波や光波の伝搬方向の変化、偏光特性^{6),7)}等を考察することができる。ここでは屈折率の変化による誘電率の変化が直線形である場合を TE 波について求め、屈折率の変化が指数関数形の場合を TE 波と TM 波について解折し、夫々の電界と磁界、Pointing Vector、伝搬方向の計算法を示している。

* 助教授 数理工学科 1975 年 9 月 30 日受理

2. 空気の屈折率と温度、圧力、湿度の関係

15°C, 760 mmHg で, 0.03% の二酸化炭素 CO_2 を含む乾燥空気の真空に対する屈折率 n_L は, 波長 $\lambda_0(\mu) = 0.2 \sim 1.35$ において次式で与えられる。

$$(n_L - 1) \times 10^8 = 6432.8 + 2949810 \times (146 - 1/\lambda_0^2(\mu))^{-1} + 25540(41 - 1/\lambda_0^2(\mu))^{-1} \quad (1)$$

この式は 1952 年の国際分光学会の決定によるもので, $\lambda_0 = 0.6328(\mu)$ とすれば, $n_L = 1.0004398$ となる。

温度, 気圧, 湿度との関係は次式で表わされる。

$$(n - 1) = \frac{n_L - 1}{1 + \alpha(t - 15)/(1 + 15\alpha)} \times \frac{P(\text{mmHg})}{760} - 55 \times 10^{-9} \times e/(1 + \alpha t) \quad (2)$$

ここで $\alpha = 0.00367$, $P(\text{mmHg})$ は気圧, $t(^{\circ}\text{C})$ は温度, $e(\text{mmHg})$ は水蒸気の圧力を示す。温度 t , 気圧 P , 水蒸気の圧力 e の変化に対する n の変化 $\partial n/\partial t$, $\partial n/\partial p$, $\partial n/\partial e$ を, $t = 20^{\circ}\text{C}$, $P = 760 \text{ mmHg}$, $e = 10 \text{ mmHg}$, $\lambda_0 =$

$0.6328(\mu)$ について求めると, $\partial n/\partial t = -1.476 \times 10^{-6}$, $\partial n/\partial P = 5.688 \times 10^{-7}$, $\partial n/\partial e = -5.124 \times 10^{-8}$ となり, 温度の効果が最大であることが判る。

この論文では空気を無損失の誘電体として取扱うこととし, 屈折率 n と比誘電率 ϵ_s , 真空の誘電率 ϵ_0 の間には, $n^2 = \epsilon_s = \epsilon/\epsilon_0$ の関係が成立つものとする。

3. 基本方程式

空気中の電界 \mathbf{E} と磁界 \mathbf{H} は, $e^{j\omega t}$ で変化する正弦波の電磁界であるとし, Maxwell の方程式は次式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0\mathbf{H} & \nabla \cdot \epsilon\mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E} & \nabla \cdot \mu_0\mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

空気の透磁率 μ_0 は真空中の値に等しいものとし, 屈折率 n , 誘電率 ϵ は図 1 において z 方向に変化するものとする。電界が入射面に直角であれば, 電磁波の各成分は E_x, H_y, H_z であり他の成分は無い。このような条件の平面波を TE 波³⁾ (Transverse Electric Wave) という。TE 波の条件を (3) 式に入れて次式が求まる。

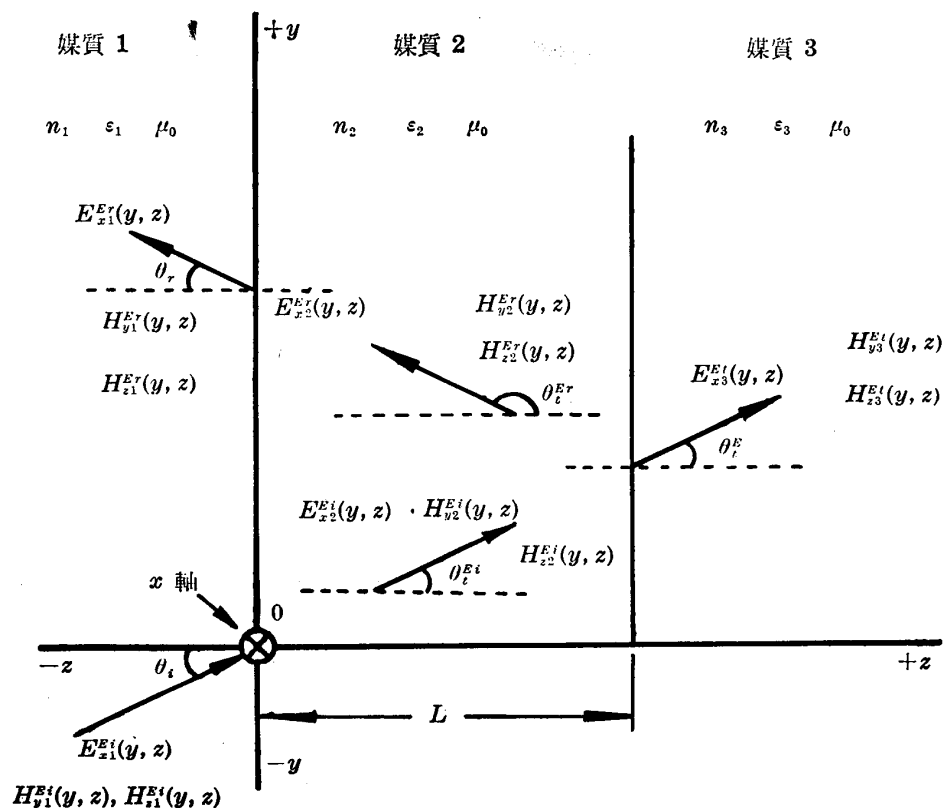


図 1 各領域における TE 波の電界磁界の表示

空気の屈折率と電磁波の伝搬特性 (中西順一郎)

$$H_y^E(y, z) = \frac{j}{\omega \mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x^E(y, z)$$

$$H_z^E(y, z) = \frac{-j}{\omega \mu_0} \frac{\partial}{\partial y} E_x^E(y, z) \quad (4)$$

$$j\omega \epsilon E_x^E(y, z) = \frac{\partial}{\partial y} H_z^E(y, z) - \frac{\partial}{\partial z} H_y^E(y, z) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 E_x^E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x^E}{\partial y^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon E_x^E = 0 \quad (6)$$

図 1 において、 $z < 0$ における入射波および反射波として次の平面波を仮定する。 i, r は夫々入射波および反射波を示し、添字 1 は均質な媒質を 1 と示すものとする。

$$E_{x1}^{Ei}(y, z) = E_i \exp\{-jk_1(y \sin \theta_i + z \cos \theta_i)\}$$

$$E_{x1}^{Er}(y, z) = E_r \exp\{-jk_1(y \sin \theta_r - z \cos \theta_r)\} \quad (7)$$

$$H_{y1}^{Ei}(y, z) = (E_i/Z_1) \cos \theta_i \exp\{-jk_1(y \sin \theta_i + z \cos \theta_i)\}$$

$$H_{y1}^{Er}(y, z) = -(E_r/Z_1) \cos \theta_r \exp\{-jk_1(y \sin \theta_r - z \cos \theta_r)\} \quad (8)$$

$$H_{z1}^{Ei}(y, z) = -(E_i/Z_1) \sin \theta_i \exp\{-jk_1(y \sin \theta_i + z \cos \theta_i)\}$$

$$H_{z1}^{Er}(y, z) = -(E_r/Z_1) \sin \theta_r \exp\{-jk_1(y \sin \theta_r - z \cos \theta_r)\} \quad (9)$$

ここで E_i は入射波の振幅、 θ_i は入射角、 θ_r は反射角、

$k_1 = \omega(\mu_0 \epsilon_1)^{1/2}$ は、誘電率 ϵ_1 が変化しない空気中の伝搬定数、 $Z_1 = (\mu_0/\epsilon_1)^{1/2}$ はその固有インピーダンスとする。
(6) 式の偏微分方程式の解を不均質な媒質 (媒質 2) について求める場合に、変数分離を容易にするために、誘電率の変化する媒質中の伝搬定数を $k_1 = \omega(\mu_0 \epsilon_1)^{1/2}$ と近似して、不均質媒質中の電界を次のように置く。

$$E_{x2}^E(y, z) = E_{x2}^E(z) \exp(-jk_1 y \sin \theta_i) \quad (10)$$

これを (6) 式に代入して次式を得る。

$$\frac{d^2 E_{x2}^E(z)}{dz^2} + \{\omega^2 \mu_0 \epsilon_2(z) - k_1^2 \sin^2 \theta_i\} E_{x2}^E(z) = 0 \quad (11)$$

ここで $\epsilon_2(z)$ は z の任意関数であり、これを与えて電界 $E_{x2}^E(z)$ を求める。電界が入射面上にある波を TM 波と呼び、この場合の (11) 式に相当する微分方程式は、後に示す (69) 式になる。 $\epsilon_2(z)$ の変化が直線的である場合の TM 波の解は、TE 波に対してここで述べている解と同等の厳密な解を求めることができないので、 $\epsilon_2(z)$ が指数関数的に変化する場合について TE 波と TM 波の解を求めることにする。

4. 誘電率が直線的に変化する場合

不均質な媒質中の誘電率 $\epsilon_2(z)$ が次のように変化する

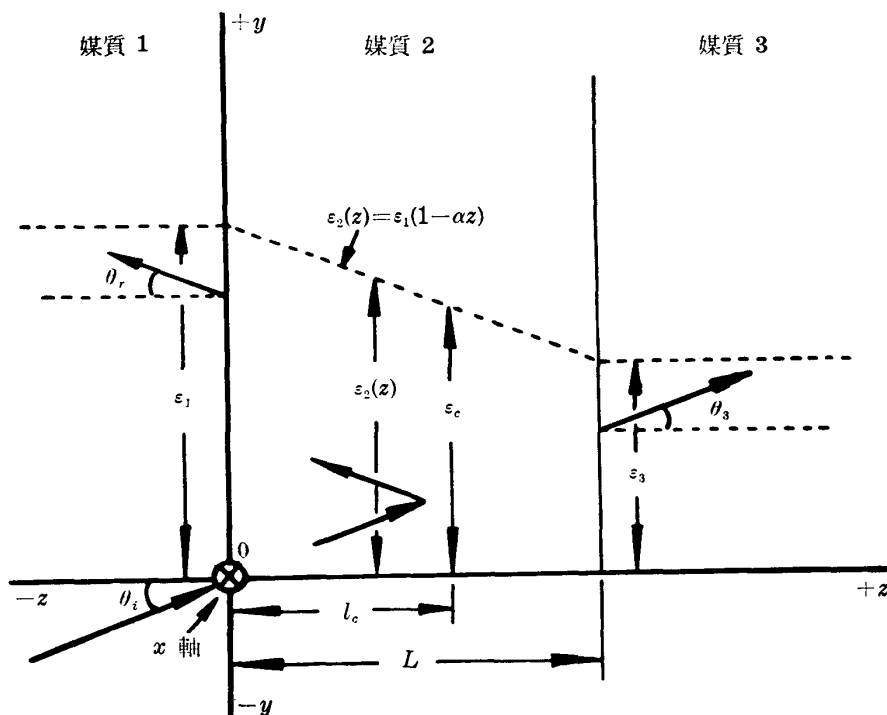


図 2 誘電率が直線的に変化する有限幅の Profile

ものとする。この形を図 2 に示す。

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(z) &= \varepsilon_1 & (z \leq 0) \\ \varepsilon_2(z) &= \varepsilon_1(1 - \alpha Z) & (L > Z > 0) \\ \varepsilon_2(z) &= \varepsilon_3 & (z \geq L)\end{aligned}\quad (12)$$

$u = \cos^2 \theta_i - \alpha z$ と置いて, $z = l_c$ において u の値が零になるものとするれば

$$\cos^2 \theta_i - \alpha l_c = 0 \quad (13)$$

$l_c > z > 0$ において (11) 式は次の形となる。

$$\frac{d^2 E_{x2}^{Ei, r}(z)}{du^2} + \left(\frac{k_1}{\alpha}\right)^2 u E_{x2}^{Ei, r}(z) = 0 \quad (14)$$

Bessel および Neumann の関数を夫々 $J_{1/3}(2k_1 u^{3/2}/3\alpha)$ および $N_{1/3}(2k_1 u^{3/2}/3\alpha)$ とすれば, (14) 式の解は次のようになる。

$$\begin{aligned}E_{x2}^{Ei}(y, z) &= u^{1/2} \left\{ \frac{A}{C} J_{1/3}(2k_1 u^{3/2}/3\alpha) \right. \\ E_{x2}^{Er}(y, z) &= u^{1/2} \left\{ \frac{B}{D} N_{1/3}(2k_1 u^{3/2}/3\alpha) \right\} \exp(-jk_1 y \sin \theta_i) \\ &\quad \left. \exp(-jk_1 y \sin \theta_r) \right\} \quad (15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_{y2}^{Ei}(y, z) &= \frac{-ju}{Z_1} \left\{ \frac{A}{C} J_{-2/3}(2k_1 u^{3/2}/3\alpha) \right. \\ H_{y2}^{Er}(y, z) &= \frac{-ju}{Z_1} \left\{ \frac{B}{D} N_{-2/3}(2k_1 u^{3/2}/3\alpha) \right\} \exp(-jk_1 y \sin \theta_i) \\ &\quad \left. \exp(-jk_1 y \sin \theta_r) \right\} \quad (16)\end{aligned}$$

境界条件 $E_{x1}^{Ei}(y, 0) = E_{x2}^{Ei}(y, 0)$, $H_{y1}^{Ei}(y, 0) = H_{y2}^{Ei}(y, 0)$ より任意定数 A, B を求めると, $\delta = (2k_1/3\alpha) \cos^3 \theta_i$ として

$$\begin{aligned}A &= (\pi\delta/2)(E_i/\cos \theta_i)\{N_{-2/3}(\delta) - jN_{1/3}(\delta)\} \\ B &= (-\pi\delta/2)(E_i/\cos \theta_i)\{J_{-2/3}(\delta) - jJ_{1/3}(\delta)\} \quad (17)\end{aligned}$$

境界条件 $E_{x1}^{Er}(y, 0) = E_{x2}^{Er}(y, 0)$, $H_{y1}^{Er}(y, 0) = H_{y2}^{Er}(y, 0)$ より, C, D を求めると

$$\begin{aligned}C &= (\pi\delta/2)(E_r/\cos \theta_i)\{N_{-2/3}(\delta) + jN_{1/3}(\delta)\} \\ D &= (-\pi\delta/2)(E_r/\cos \theta_i)\{J_{-2/3}(\delta) + jJ_{1/3}(\delta)\} \quad (18)\end{aligned}$$

$l_c < z < L$ の領域では $v = \alpha z - \cos^2 \theta_i$ とおくことにより (11) 式は次式となる。

$$\frac{d^2 E_{x2}^{Ei}(z)}{dv^2} - \left(\frac{k_1}{\alpha}\right)^2 v E_{x2}^{Ei}(z) = 0 \quad (19)$$

(19) 式の解は Modified Bessel 関数を $I_{1/3}(2k_1 v^{3/2}/3\alpha)$ および $K_{1/3}(2k_1 v^{3/2}/3\alpha)$ とすれば次式で表わされる。

$$\begin{aligned}E_{x2}^{Ei}(y, z) &= v^{1/2} \{EI_{1/3}(2k_1 v^{3/2}/3\alpha) \\ &\quad + FK_{1/3}(2k_1 v^{3/2}/3\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_{y2}^{Ei}(y, z) &= (jv/Z_1)\{EI_{-2/3}(2k_1 v^{3/2}/3\alpha) \\ &\quad - FK_{-2/3}(2k_1 v^{3/2}/3\alpha)\} \quad (20)\end{aligned}$$

$z = l_c$ において (21) 式の境界条件より, (22) 式のように任意定数の関係が求まる。

$$\begin{aligned}E_{x2}^{Ei}(y, l_c) + E_{x2}^{Er}(y, l_c) &= E_{x2}^{Ei}(y, l_c) \\ H_{y2}^{Ei}(y, l_c) + H_{y2}^{Er}(y, l_c) &= H_{y2}^{Ei}(y, l_c) \quad (21)\end{aligned}$$

$$B + D = -(\pi/2)F$$

$$A + C + (B + D)/\sqrt{3} = \pi F/\sqrt{3} - E \quad (22)$$

$z = L$ における電界を E_3 , 透過角を θ_3 , $z \geq L$ における均質な空気 (媒質 3) の誘電率を ε_3 , 伝搬定数を $k_3 = \omega(\mu_0 \varepsilon_3)^{1/2}$, 固有インピーダンスを $Z_3 = (\mu_0/\varepsilon_3)^{1/2}$ として, 電界と磁界の値を次のように置く。

$$\begin{aligned}E_{x3}^{Ei}(y, z) &= E_3 \exp\{-jk_3(y \sin \theta_3 + z \cos \theta_3)\} \\ H_{y3}^{Ei}(y, z) &= (E_3 \cos \theta_3/Z_3) \exp\{-jk_3(y \sin \theta_3 + z \cos \theta_3)\} \quad (23)\end{aligned}$$

$z = L$ において (24) 式の境界条件より, (25) 式のように任意定数の関係が定まる。

$$E_{x2}^{Ei}(y, L) = E_{x3}^{Ei}(y, L), \quad H_{y2}^{Ei}(y, L) = H_{y3}^{Ei}(y, L) \quad (24)$$

$$\mathcal{J}_{1/3}E + \mathcal{K}_{1/3}F = e^{-j\rho}E_3$$

$$\mathcal{J}_{-2/3}E - \mathcal{K}_{-2/3}F = -j\kappa e^{-j\rho}E_3 \quad (25)$$

$$\text{但し, } \kappa = (k_3/k_1) \cos \theta_3, \quad \rho = k_1 L, \quad (26)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{1/3} &= (\alpha L - \cos^2 \theta_i)^{1/2} I_{1/3}\{2k_1(\alpha L - \cos^2 \theta_i)^{3/2}/3\alpha\} \\ \mathcal{K}_{1/3} &= (\alpha L - \cos^2 \theta_i)^{1/2} K_{1/3}\{2k_1(\alpha L - \cos^2 \theta_i)^{3/2}/3\alpha\} \\ \mathcal{J}_{-2/3} &= (\alpha L - \cos^2 \theta_i) I_{-2/3}\{2k_1(\alpha L - \cos^2 \theta_i)^{3/2}/3\alpha\} \\ \mathcal{K}_{-2/3} &= (\alpha L - \cos^2 \theta_i) K_{-2/3}\{2k_1(\alpha L - \cos^2 \theta_i)^{3/2}/3\alpha\} \quad (27)\end{aligned}$$

(18) 式より

$$\nu = -D/C = \{J_{-2/3}(\delta) + jJ_{1/3}(\delta)\}/\{N_{-2/3}(\delta) + jN_{1/3}(\delta)\} \quad (28)$$

とすれば, 次式より E_3, C, E, F を求めることができる。

$$\begin{aligned}\nu C - (\pi/2)F &= B \\ (1 - \nu/\sqrt{3})C + E - (\pi/\sqrt{3})F &= -A - B/\sqrt{3} \quad (29)\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_{1/3}E + \mathcal{K}_{1/3}F - e^{-j\rho}E_3 = 0$$

$$\mathcal{J}_{-2/3}E - \mathcal{K}_{1/3}F + j\kappa e^{-j\rho}E_3 = 0$$

$$E_3 = \frac{(j3\alpha E_i/k_1 \cos \theta_i)e^{j\rho}}{a + jb} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (\pi/2)(\sqrt{3}J_{-2/3} - N_{-2/3})\mathcal{J}_{-2/3} - J_{-2/3}\mathcal{K}_{-2/3} \\ &\quad + (\pi/2)\kappa(N_{1/3} - \sqrt{3}J_{1/3})\mathcal{J}_{1/3} - \kappa J_{1/3}\mathcal{K}_{1/3} \quad (31)\end{aligned}$$

空気の屈折率と電磁波の伝搬特性 (中西順一郎)

$$b = (\pi/2)(\sqrt{3}J_{1/3} - N_{1/3})\mathcal{J}_{-2/3} - J_{1/3}\mathcal{K}_{-2/3} \\ + (\pi/2)\kappa(\sqrt{3}J_{-2/3} - N_{-2/3})\mathcal{J}_{1/3} + \kappa J_{-2/3}\mathcal{K}_{1/3} \quad (32)$$

但し, $J_{1/3} = J_{1/3}(\delta)$, $J_{-2/3} = J_{-2/3}(\delta)$
 $N_{1/3} = N_{1/3}(\delta)$, $N_{-2/3} = N_{-2/3}(\delta)$
 とする。

$$C = \frac{c + jd}{a + jb} \cdot \frac{\pi k_1 E_i \cos^2 \theta_i}{3\alpha} \quad (33)$$

$$d = (\pi\kappa/2)\{(N_{-2/3}^2 - N_{1/3}^2) + \sqrt{3}(J_{1/3}N_{1/3} - J_{-2/3}N_{-2/3})\mathcal{J}_{-2/3} - (\sqrt{3}\kappa/\delta)\mathcal{J}_{1/3} \\ - \kappa(J_{1/3}N_{-2/3} + J_{-2/3}N_{1/3})\kappa_{1/3} \\ + (J_{-2/3}N_{-2/3} - J_{1/3}N_{1/3})\kappa_{-2/3}\} \quad (34)$$

$$d = (\pi\kappa/2)\{(N_{1/3}^2 + N_{-2/3}^2) - \sqrt{3}(J_{1/3}N_{1/3} + J_{-2/3}N_{-2/3})\} \\ \cdot \mathcal{J}_{1/3} + (\sqrt{3}\mathcal{J}_{-2/3} - 2\kappa_{-2/3}/\pi)/\delta \\ - \kappa(J_{1/3}N_{1/3} + J_{-2/3}N_{-2/3})\kappa_{1/3} \quad (35)$$

$$E = \frac{2E_i\{(\epsilon_3/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}\kappa_{1/3} + jK_{-2/3}\}}{a + jb} \quad (36)$$

$$F = \frac{2E_i(-\kappa\mathcal{J}_{1/3} + j\mathcal{J}_{-2/3})}{a + jb} \quad (37)$$

反射係数 E_r/E_i を R として求めると,

$$R = -\frac{\{(a_1 + a_3) - (a_4 - a_2)\} - j\{(b_2 + b_4) + (b_5 - b_1)\}}{\{(a_1 + a_3) + (a_4 - a_2)\} + j\{(b_2 + b_4) - (b_5 - b_1)\}} \quad (38)$$

$$a_1 = (\pi/2)(N_{-2/3} - \sqrt{3}J_{-2/3})\mathcal{J}_{-2/3} \\ a_2 = (\pi/2)(N_{1/3} - \sqrt{3}J_{1/3})\kappa\mathcal{J}_{1/3} \\ a_3 = J_{-2/3}\mathcal{K}_{-2/3}, \quad a_4 = \kappa J_{1/3}\kappa_{1/3} \quad (39)$$

$$b_1 = (\pi/2)(N_{-2/3} - \sqrt{3}J_{-2/3})K\mathcal{J}_{1/3} \\ b_2 = (\pi/2)(N_{1/3} - \sqrt{3}J_{1/3})\mathcal{J}_{-2/3} \\ b_4 = J_{1/3}\mathcal{K}_{-2/3}, \quad b_5 = \kappa J_{-2/3}\kappa_{1/3} \quad (40)$$

透過係数 E_3/E_i を T として求めると

$$T = -\frac{j3\alpha e^{j\rho}/k_1 \cos \theta_i}{\{(a_1 + a_3) + (a_4 - a_2)\} + j\{(b_2 + b_4) - (b_5 - b_1)\}} \quad (41)$$

媒質 1 における入射波のエネルギーと反射波のエネルギーは夫々 $E_i^2 \cos \theta_i / Z_1$, $E_r^2 \cos \theta_r / Z_1$, 媒質 3 に透過するエネルギーは $|E_3|^2 \cos \theta_3 / Z_3$ であるから, エネルギー保存の法則により次式が成立する。

$$E_i^2 \cos \theta_i / Z_1 = E_r^2 \cos \theta_r / Z_1 = |E_3|^2 \cos \theta_3 / Z_3 \\ 1 = E_r^2 / E_i^2 + |E_3|^2 Z_1 \cos \theta_3 / E_i^2 Z_3 \cos \theta_i \quad (42)$$

(26) 式より $\kappa = (k_3/k_1) \cos \theta_3 = (Z_1/Z_3) \cos \theta_3$ であるから

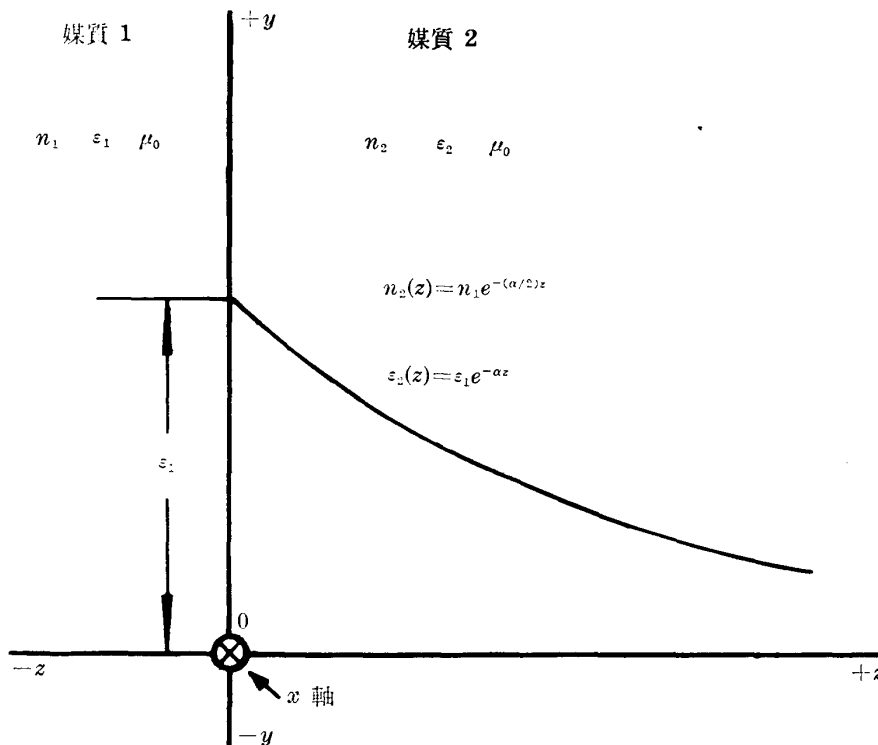


図 3 誘電率が指数関数形に変化する Profile

$$|R|^2 + |T|^2 \cos \theta_i = 1 \quad (43)$$

(38) 式と (41) 式をこの式に代入すれば、エネルギー保存の法則が成立していることが確かめられる。

5. 誘電率が指数関数形の場合

不均質な空気中の誘電率 $\varepsilon_2(z)$ が次のように変化するものとする。

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(z) &= \varepsilon_1 & (z < 0) \\ \varepsilon_2(z) &= \varepsilon_1 e^{-\alpha z} & (z \geq 0) \end{aligned} \quad (44)$$

図 3 に於て、媒質 1 における TE 波の入射波の各成分を (7) 式によるものとし、媒質 2 における TE 波の各成分を $E_{x_2}^E(y, z)$, $H_{y_2}^E(y, z)$, $H_{z_2}^E(y, z)$, TM 波の各成分

を $H_{x_2}^M(y, z)$, $E_{y_2}^M(y, z)$, $E_{z_2}^M(y, z)$ で表わす。

5.1 TE 波

(11) 式の $\varepsilon_2(z)$ を (44) 式によるものとし、 $e^{-\alpha z} = u$ とすれば次式に変換される。

$$\frac{d^2 E_{x_2}^E}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dE_{x_2}^E}{du} + \left(\frac{k_1}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{\sin^2 \theta_i}{u^2}\right) E_{x_2}^E = 0 \quad (45)$$

$v = (2k_1/\alpha)u^{1/2}$ とすれば次式に変換される。

$$\frac{d^2 E_{x_2}^E}{dv^2} + \frac{1}{v} \frac{dE_{x_2}^E}{dv} + \left\{1 - \frac{(2k_1 \sin \theta_i / \alpha)^2}{v^2}\right\} E_{x_2}^E = 0 \quad (46)$$

$r = 2k_1/\alpha$, $v = r \sin \theta_i$ として次の解が求まる。

$$\begin{aligned} E_{x_2}^{Ei}(y, z) &= \left\{ \frac{A}{C} J_\nu(r u^{1/2}) + \frac{B}{D} N_\nu(r u^{1/2}) \right\} \exp(-j k_1 y \sin \theta_i) \\ E_{x_2}^{Er}(y, z) &= \left\{ \frac{C}{D} J_\nu(r u^{1/2}) + \frac{B}{A} N_\nu(r u^{1/2}) \right\} \exp(-j k_1 y \sin \theta_r) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} H_{y_2}^{Ei}(y, z) &= -\frac{j}{Z_i} \left[\frac{A}{C} \{ \sin \theta_i J_\nu(r u^{1/2}) - u^{1/2} J_{\nu+1}(r u^{1/2}) \} \right. \\ H_{y_2}^{Er}(y, z) &= -\frac{j}{Z_i} \left[\frac{C}{D} \{ \sin \theta_i J_\nu(r u^{1/2}) - u^{1/2} J_{\nu+1}(r u^{1/2}) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{D} \{ \sin \theta_i N_\nu(r u^{1/2}) - u^{1/2} N_{\nu+1}(r u^{1/2}) \} \right] \exp(-j k_1 y \sin \theta_i) \\ &\quad \left. \exp(-j k_1 y \sin \theta_r) \right] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} H_{z_2}^{Ei}(y, z) &= -\frac{\sin \theta_i}{Z_i} \left\{ \frac{A}{C} J_\nu(r u^{1/2}) + \frac{B}{D} N_\nu(r u^{1/2}) \right\} \exp(-j k_1 y \sin \theta_i) \\ H_{z_2}^{Er}(y, z) &= -\frac{\sin \theta_r}{Z_i} \left\{ \frac{C}{D} J_\nu(r u^{1/2}) + \frac{B}{A} N_\nu(r u^{1/2}) \right\} \exp(-j k_1 y \sin \theta_r) \end{aligned} \quad (49)$$

境界条件

$$\begin{aligned} E_{x_1}^{Ei}(y, 0) &= E_{x_2}^{Ei}(y, 0), \quad H_{y_1}^{Ei}(y, 0) = H_{y_2}^{Ei}(y, 0) \\ E_{x_1}^{Er}(y, 0) &= E_{x_2}^{Er}(y, 0), \quad H_{y_1}^{Er}(y, 0) = H_{y_2}^{Er}(y, 0) \end{aligned}$$

より任意定数 A, B, C, D を求める。

$$A = \{N(\theta_i, r) - j \cos \theta_i N_\nu(r)\} \pi k_1 E_i / \alpha \quad (51)$$

$$B = -\{J(\theta_i, r) - j \cos \theta_i J_\nu(r)\} \pi k_1 E_i / \alpha$$

$$C = \{N(\theta_i, r) + j \cos \theta_i N_\nu(r)\} \pi k_1 E_r / \alpha \quad (52)$$

$$D = -\{J(\theta_i, r) + j \cos \theta_i J_\nu(r)\} \pi k_1 E_r / \alpha$$

但し、

$$J(\theta_i, r) = \sin \theta_i J_\nu(r) - J_{\nu+1}(r) \quad (53)$$

$$N(\theta_i, r) = \sin \theta_i N_\nu(r) - N_{\nu+1}(r)$$

この A, B, C, D を (47) 式に代入して次式が求まる。

$$\begin{aligned} |E_{x_2}^E(y, z)/E_i| &= |E_{x_2}^{Er}(y, z)/E_i| \\ &= [\{ \sin \theta_i \{ N_\nu(r) J_\nu(r u^{1/2}) - J_{\nu+1}(r) N_\nu(r u^{1/2}) \} + \{ J_{\nu+1}(r) N_\nu(r u^{1/2}) - N_{\nu+1}(r) J_\nu(r u^{1/2}) \} \}^2 \\ &\quad + \cos^2 \theta_i \{ J_\nu(r) N_\nu(r u^{1/2}) - N_\nu(r) J_\nu(r u^{1/2}) \}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (54)$$

空気の屈折率と電磁波の伝搬特性 (中西順一郎)

(47) 式の値を $z \rightarrow \infty$ で有限にするためには $B+D=0$ でなければならない。これより反射係数 $R^E = E_r/E_i$ が次式のように求まる。

$$R^E = \frac{\cos \theta_i J_\nu(\gamma) + j\{\sin \theta_i J_\nu(\gamma) - J_{\nu+1}(\gamma)\}}{\cos \theta_i J_\nu(\gamma) - j\{\sin \theta_i J_\nu(\gamma) - J_{\nu+1}(\gamma)\}} \quad (55)$$

入射波と反射波の合成値 $E_{x2}^{Ei}(y, z)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} E_{x2}^{Ei}(y, z) &= E_{x2}^{Ei}(y, z) + E_{x2}^{Er}(y, z) \\ &= (A+C)J_\nu(\gamma u^{1/2}) \exp(-jk_1 y \sin \theta_i) \\ &= \frac{2 \cos \theta_i E_i J_\nu(\gamma u^{1/2}) \exp(-jk_1 y \sin \theta_i)}{\cos \theta_i J_\nu(\gamma) - j\{\sin \theta_i J_\nu(\gamma) - J_{\nu+1}(\gamma)\}} \quad (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{z2}^{Ei}(y, z) &= \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i J_\nu(\gamma u^{1/2}) E_i / Z_1}{\cos \theta_i J_\nu(\gamma) - j\{\sin \theta_i J_\nu(\gamma) - J_{\nu+1}(\gamma)\}} \\ &\times \exp(-jk_1 y \sin \theta_i) \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{y2}^{Ei}(y, z) &= \frac{-2j \cos \theta_i \{\sin \theta_i J_\nu(\gamma u^{1/2}) - u^{1/2} J_{\nu+1}(\gamma u^{1/2})\} E_i / Z_1}{\cos \theta_i J_\nu(\gamma) - j\{\sin \theta_i J_\nu(\gamma) - J_{\nu+1}(\gamma)\}} \\ &\times \exp(-jk_1 y \sin \theta_i) \quad (58) \end{aligned}$$

z 方向に進む入射波の Pointing Vector P_{z2}^{Ei} , y 方向に進む入射波の Pointing Vector P_{y2}^{Ei} は夫々次のように

求めることができる。

$$P_{z2}^{Ei} = \text{Re}\{E_{x2}^{Ei}(y, z) H_{y2}^{Ei*}(y, z)\} = \cos \theta_i E_i^2 / Z_1 \quad (59)$$

$$\begin{aligned} P_{y2}^{Ei} &= -\text{Re}\{E_{x2}^{Ei}(y, z) H_{z2}^{Ei*}(y, z)\} \\ &= (\sin \theta_i E_i^2 / Z_1) (\pi k_1 / \alpha)^2 (X_E^2 + Y_E^2) \quad (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_E &= \sin \theta_i \{J_\nu(\gamma u^{1/2}) N_\nu(\gamma) - N_\nu(\gamma u^{1/2}) J_\nu(\gamma)\} \\ &+ N_\nu(\gamma u^{1/2}) J_{\nu+1}(\gamma) - J_\nu(\gamma u^{1/2}) N_{\nu+1}(\gamma) \quad (61) \\ Y_E &= \cos \theta_i \{J_\nu(\gamma u^{1/2}) N_\nu(\gamma) - J_\nu(\gamma) N_\nu(\gamma u^{1/2})\} \end{aligned}$$

不均質媒質 (媒質 2) の中を通過する角度を θ_i^{Ei} とすれば次式を得る。

$$\tan \theta_i^{Ei} = P_{y2}^{Ei} / P_{z2}^{Ei} = \tan \theta_i (\pi k_1 / \alpha)^2 (X_E^2 + Y_E^2) \quad (62)$$

z 方向に進む反射波の Pointing Vector P_{z2}^{Er} , y 方向に進む反射波の Pointing Vector P_{y2}^{Er} は夫々次のようになる。

$$P_{z2}^{Er} = \text{Re}\{E_{x2}^{Er}(y, z) H_{y2}^{Er*}(y, z)\} = -\cos \theta_i E_i^2 / Z_1 \quad (63)$$

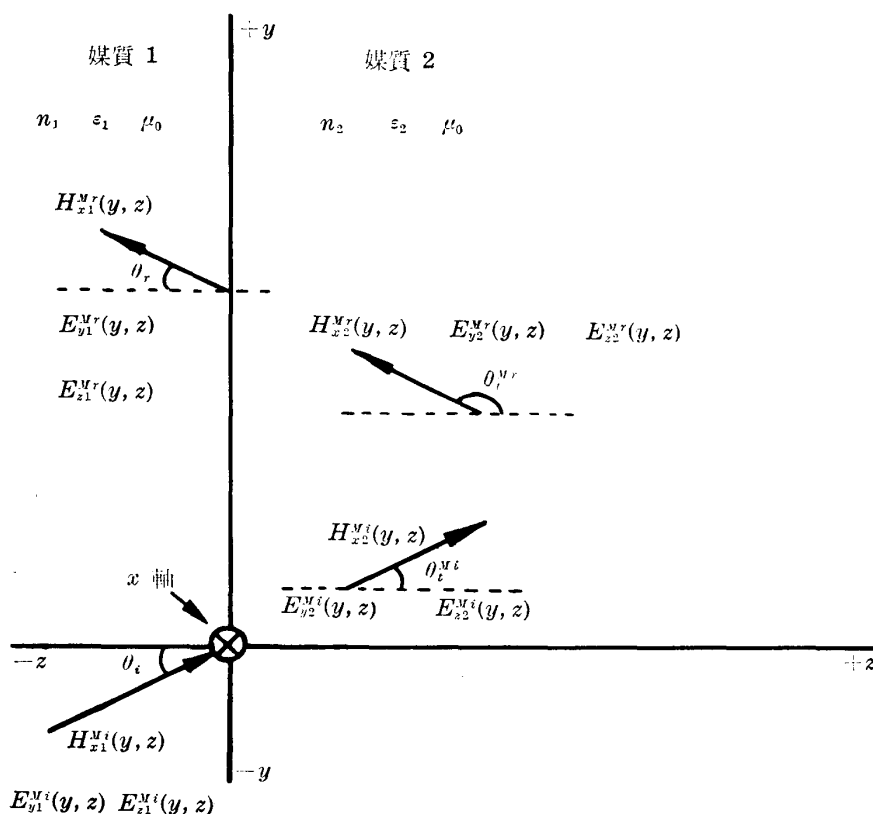


図 4 各領域における TM 波の電界磁界の表示

$$P_{y_2}^{Er} = -\operatorname{Re}\{E_{x_2}^{Er}(y, z)H_{x_2}^{Er*}(y, z)\} \\ = (\sin\theta_i E_i^2/Z_1)(\pi k_1/\alpha)^2(X_E^2 + Y_E^2) = P_{y_2}^{Ei} \quad (64)$$

不均質媒質 (媒質 2) の中を通過する角度を θ_i^{Er} とすれば次式を得る。

$$\tan\theta_i^{Er} = P_{y_2}^{Er}/P_{x_2}^{Er} = -\tan\theta_i(\pi k_1/\alpha)^2(X_E^2 + Y_E^2) \\ = -\tan\theta_i^{Ei} \quad (65)$$

5.2 TM 波

図 4 に示すように、電界が入射面上にあり、電界と磁界の成分が $H_x^M(y, z)$, $E_y^M(y, z)$, $E_z^M(y, z)$ のみであり、他の成分は無い場合を TM 波 (Transverse Magnetic Wave) という。この条件で (3) 式を展開して次式が求まる。

$$E_y^M(y, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} H_x^M(y, z) \quad (66)$$

$$E_z^M(y, z) = \frac{j}{\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} H_x^M(y, z) \quad (67)$$

$$-j\omega\mu_0 H_x^M(y, z) = \frac{\partial}{\partial y} E_z^M(y, z) - \frac{\partial}{\partial z} E_y^M(y, z) \quad (68)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} H_x^M(y, z) - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \frac{d}{dz} H_x^M(y, z) \\ + k_1^2(e^{-\alpha z} - \sin^2\theta_i) H_x^M(z) = 0 \quad (69)$$

$z < 0$ の領域より x - y 平面に入射および反射する磁界と電界を次のように置く。

$$H_{x_1}^M(y, z) = H_i \exp\{-jk_1(y \sin\theta_i + z \cos\theta_i)\}$$

$$H_{x_1}^M(y, z) = H_r \exp\{-jk_1(y \sin\theta_r - z \cos\theta_r)\} \quad (70)$$

$$E_{y_1}^M(y, z) = -H_i Z_1 \cos\theta_i \exp\{-jk_1(y \sin\theta_i + z \cos\theta_i)\}$$

$$E_{y_1}^M(y, z) = H_r Z_1 \cos\theta_r \exp\{-jk_1(y \sin\theta_r - z \cos\theta_r)\} \quad (71)$$

$$E_{z_1}^M(y, z) = H_i Z_1 \sin\theta_i \exp\{-jk_1(y \sin\theta_i + z \cos\theta_i)\}$$

$$E_{z_1}^M(y, z) = H_r Z_1 \sin\theta_r \exp\{-jk_1(y \sin\theta_r - z \cos\theta_r)\} \quad (72)$$

不均質媒質中における (69) 式の解を次の形として (69) 式に代入すれば (74) 式が求まる。

$$H_{x_2}^M(y, z) = H_{x_2}^M(z) \exp(-jk_1 y \sin\theta_i) \quad (73)$$

$$\frac{d^2}{du^2} H_{x_2}^M(z) + \left(\frac{k_1}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{\sin^2\theta_i}{u^2}\right) H_{x_2}^M(z) = 0 \quad (74)$$

$x = u^{1/2}$, $H_{x_2}^M(z) = x \cdot y(x)$ と置くことにより次式に変換される。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{2k_1}{\alpha}\right)^2 \left\{1 - \frac{\sin^2\theta_i + (\alpha/2k_1)^2}{x^2}\right\} y = 0 \quad (75)$$

$2k_1 u^{1/2}/\alpha = t$, $p = \{1 + (2k_1 \sin\theta_i/\alpha)^2\}^{1/2}$ とおくことにより次式に変換される。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{p^2}{t^2}\right) y = 0 \quad (76)$$

任意定数を F, G, H, K とすれば, (69) 式の解は次式となる。

$$\begin{aligned} H_{x_2}^M(y, z) &= u^{1/2} \left\{ \frac{F}{H} J_p(\gamma u^{1/2}) + \frac{G}{K} N_p(u^{1/2}) \right\} \exp(-jk_1 y \sin\theta_i) \\ H_{x_2}^M(y, z) &= u^{1/2} \left\{ \frac{F}{H} J_p(\gamma u^{1/2}) + \frac{G}{K} N_p(u^{1/2}) \right\} \exp(-jk_1 y \sin\theta_r) \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} E_{z_2}^M(y, z) &= \frac{Z_1 \sin\theta_i}{u^{1/2}} \left\{ \frac{F}{H} J_p(\gamma u^{1/2}) + \frac{G}{K} N_p(\gamma u^{1/2}) \right\} \exp(-jk_1 y \sin\theta_i) \\ E_{z_2}^M(y, z) &= \frac{Z_1 \sin\theta_r}{u^{1/2}} \left\{ \frac{F}{H} J_p(\gamma u^{1/2}) + \frac{G}{K} N_p(\gamma u^{1/2}) \right\} \exp(-jk_1 y \sin\theta_r) \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} E_{y_2}^M(y, z) &= jZ_1 \left[\frac{F}{H} \left\{ \frac{1}{\gamma} (1+p) \frac{1}{u^{1/2}} J_p(\gamma u^{1/2}) - J_{p+1}(\gamma u^{1/2}) \right\} \right. \\ E_{y_2}^M(y, z) &+ \left. \frac{G}{K} \left\{ \frac{1}{\gamma} (1+p) \frac{1}{u^{1/2}} N_p(\gamma u^{1/2}) - N_{p+1}(\gamma u^{1/2}) \right\} \right] \exp(-jk_1 y \sin\theta_i) \\ &+ \left[\frac{F}{H} \left\{ \frac{1}{\gamma} (1+p) \frac{1}{u^{1/2}} J_p(\gamma u^{1/2}) - J_{p+1}(\gamma u^{1/2}) \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{G}{K} \left\{ \frac{1}{\gamma} (1+p) \frac{1}{u^{1/2}} N_p(\gamma u^{1/2}) - N_{p+1}(\gamma u^{1/2}) \right\} \right] \exp(-jk_1 y \sin\theta_r) \end{aligned} \quad (79)$$

境界条件

$$\begin{aligned} H_{x_1}^M(y, 0) &= H_{x_2}^M(y, 0), \quad E_{y_1}^M(y, 0) = E_{y_2}^M(y, 0) \\ H_{x_1}^M(y, 0) &= H_{x_2}^M(y, 0), \quad E_{y_1}^M(y, 0) = E_{y_2}^M(y, 0) \end{aligned} \quad (80)$$

より任意定数 F, G, H, K を求める。

空気の屈折率と電磁波の伝搬特性 (中西順一郎)

$$\begin{aligned} F &= \{N(p, r) - j \cos \theta_i N_p(r)\} \pi k_1 E_i / \alpha Z_1 \\ G &= -\{J(p, r) - j \cos \theta_i J_p(r)\} \pi k_1 E_i / \alpha Z_1 \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} H &= \{N(p, r) + j \cos \theta_i N_p(r)\} \pi k_1 E_r / \alpha Z_1 \\ K &= -\{J(p, r) + j \cos \theta_i J_p(r)\} \pi k_1 E_r / \alpha Z_1 \end{aligned} \quad (82)$$

但し,

$$\begin{aligned} J(p, r) &= (1+p)J_p(r)/r - J_{p+1}(r) \\ N(p, r) &= (1+p)N_p(r)/r - N_{p+1}(r) \end{aligned} \quad (83)$$

F, G, H, K を (77) 式に代入して次式が求まる。

$$\begin{aligned} |H_{x_2}^{M_i}(y, z)/H_i| &= |H_{x_2}^{M_r}(y, z)/H_i| \\ &= (\pi k_1 u^{1/2} / \alpha Z_1) [(1+p)(\alpha/2k_1) \{J_p(r u^{1/2}) N_p(r) \\ &\quad - N_p(r u^{1/2}) J_p(r)\} - \{J_p(r u^{1/2}) N_{p+1}(r) \\ &\quad - N_p(r u^{1/2}) J_{p+1}(r)\}]^2 + \cos^2 \theta_i \{J_p(r u^{1/2}) N_p(r) \\ &\quad - N_p(r u^{1/2}) J_p(r)\}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (84)$$

(77) 式の値を $z \rightarrow \infty$ で有限にするために $G+K=0$ とすれば, 反射係数 $R^M = H_r/H_i$ は次式のようになる。

$$R^M = \frac{\cos \theta_i J_p(r) + j\{(1+p)J_p(r)/r - J_{p+1}(r)\}}{\cos \theta_i J_p(r) - j\{(1+p)J_p(r)/r - J_{p+1}(r)\}} \quad (85)$$

入射波と反射波の合成値 $H_{x_2}^{M_i}(y, z)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} H_{x_2}^{M_i}(y, z) &= H_{x_2}^{M_i}(y, z) + H_{x_2}^{M_r}(y, z) \\ &= (F+H) u^{1/2} J_p(r u^{1/2}) \exp(-jk_1 y \sin \theta_i) \\ &= \frac{2 \cos \theta_i (E_i/Z_1) u^{1/2} J_p(r u^{1/2}) \exp(-jk_1 y \sin \theta_i)}{\cos \theta_i J_p(r) - j\{(1+p)J_p(r)/r - J_{p+1}(r)\}} \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} E_{y_2}^{M_i}(y, z) &= \frac{2j \cos \theta_i E_i \{(1+p)J_p(r u^{1/2})/r u^{1/2} - J_{p+1}(r u^{1/2})\}}{\cos \theta_i J_p(r) - j\{(1+p)J_p(r)/r - J_{p+1}(r)\}} \\ &\quad \times \exp(-jk_1 y \sin \theta_i) \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} E_{z_2}^{M_i}(y, z) &= \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_i E_i (1/u^{1/2}) J_p(r u^{1/2})}{\cos \theta_i J_p(r) - j\{(1+p)J_p(r)/r - J_{p+1}(r)\}} \\ &\quad \times \exp(-jk_1 y \sin \theta_i) \end{aligned} \quad (88)$$

z 方向に進む入射波の Pointing Vector $P_{z_2}^{M_i}$, y 方向に進む入射波の Pointing Vector $P_{y_2}^{M_i}$ を夫々次式に示す。

$$P_{z_2}^{M_i} = -\operatorname{Re}\{E_{y_2}^{M_i}(y, z) H_{x_2}^{M_i*}(y, z)\} = \cos \theta_i E_i^2 / Z_1 \quad (89)$$

$$\begin{aligned} P_{y_2}^{M_i} &= \operatorname{Re}\{E_{z_2}^{M_i}(y, z) H_{x_2}^{M_i*}(y, z)\} \\ &= (\sin \theta_i E_i^2 / Z_1) (\pi k_1 / \alpha)^2 (X_M^2 + Y_M^2) \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} X_M &= (1+p) \{J_p(r u^{1/2}) N_p(r) - N_p(r u^{1/2}) J_p(r)\} / r \\ &\quad - J_p(r u^{1/2}) N_{p+1}(r) + N_p(r u^{1/2}) J_{p+1}(r) \end{aligned} \quad (91)$$

$$Y_M = \cos \theta_i \{J_p(r u^{1/2}) N_p(r) - N_p(r u^{1/2}) J_p(r)\}$$

不均質媒質 (媒質 2) の中を通過する角度を θ_i^M とすれば次式を得る。

$$\tan \theta_i^M = P_{y_2}^{M_i} / P_{z_2}^{M_i} = \tan \theta_i (\pi k_1 / \alpha)^2 (X_M^2 + Y_M^2) \quad (92)$$

z 方向に進む反射波の Pointing Vector $P_{z_2}^{M_r}$, y 方向に進む反射波の Pointing Vector $P_{y_2}^{M_r}$ は夫々次のようになる。

$$P_{z_2}^{M_r} = -\operatorname{Re}\{E_{y_2}^{M_r}(y, z) H_{x_2}^{M_r*}(y, z)\} = -\cos \theta_i E_i^2 / Z_1 \quad (93)$$

$$\begin{aligned} P_{y_2}^{M_r} &= \operatorname{Re}\{E_{z_2}^{M_r}(y, z) H_{x_2}^{M_r*}(y, z)\} \\ &= (\sin \theta_i E_i^2 / Z_1) (\pi k_1 / \alpha)^2 (X_M^2 + Y_M^2) = P_{y_2}^{M_i} \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \tan \theta_i^M &= P_{y_2}^{M_r} / P_{z_2}^{M_r} = -\tan \theta_i (\pi k_1 / \alpha)^2 (X_M^2 + Y_M^2) \\ &= -\tan \theta_i^M \end{aligned} \quad (95)$$

謝 辞

以上の解析を行うに当り, 御指導を頂いた東北大学工学部通信工学科虫明康人教授に感謝する。

文 献

- 1) D. E. Kerr: Propagation of short radio Waves, p. 12, McGraw-Hill Co. (1971).
- 2) H. Bremmer: Mode expansion in the low frequency range for propagation through a curved stratified atmosphere, N.B.S. 63D, 1, p. 75 (July-August 1959).
- 3) L. M. Brekhovskikh: Waves in layered media, p. 189, Academic Press, New York (1960).
- 4) K. G. Budden: Radio waves in the ionosphere, p. 319, Cambridge University Press, London (1961).
- 5) V. L. Ginzburg: Propagation of electromagnetic waves in plasma, p. 334, North Holl and Publishing Co. Amsterdam (1961).
- 6) 中西: レーザ光 (6328 Å) の大気伝搬による偏光変動の測定, 昭和 44 年度電子通信学会全国大会ミリ波・光通信部門論文 550 昭和 44 年 9 月 15 日。
- 7) 中西: 誘電率こう配のある大気中を伝搬するレーザ光の偏光特性, 電子通信学会論文誌 VOL. J59-B, No. 2, 昭和 51 年 2 月。
- 8) 前田憲一: 電波工学, p. 34 昭和 34 年 12 月 5 日 共立出版株式会社。