

博士論文  
令和元年度  
マルチロータの状態変数モデリングと  
飛行状態、モータ故障への応用

令和2年3月  
湘南工科大学大学院  
工学研究科電気情報工学専攻  
磯貝 海斗

# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	本研究の背景と目的	1
1.2	本論文の概要	3
第 2 章	マルチロータの運動の数学的基礎	5
2.1	動座標系, ローカル座標系, 静止座標系における運動	5
2.2	剛体の動力学	8
第 3 章	マルチロータの力学システムとしての状態方程式	11
3.1	オイラー角の状態変数を持つマルチロータのオイラー＝ラグランジュ方程式	11
3.2	標準的な対称な形状を有するマルチロータの機体フレーム構成	15
第 4 章	マルチロータの飛行状態と飛行操作, および飛行の動作点	18
4.1	マルチロータの動作点 (または, 飛行状態), 飛行操作に関する諸定理	20
4.2	完全なモータ故障の存在下でマルチロータの墜落を回避し, 飛行を維持する飛行状態と飛行操作の問題	24
第 5 章	定理を応用したフィードフォワード形式のマルチロータの飛行シミュレーション	30
5.1	完全なモータ故障が存在しない, 正常な場合のマルチロータの飛行状態, 飛行操作のシミュレーション	32
5.2	完全なモータ故障が存在する, マルチロータの墜落を回避し, 飛行を維持するシミュレーション	39
第 6 章	完全なモータ故障の存在下, すべての飛行操作が可能な場合のヘキサロータの飛行状態を安定させる状態変数フィードバックを持つ線形または非線形の動力学の状態方程式	47
6.1	完全なモータ故障の存在下, すべての飛行操作が可能な場合のヘキサロータの安定飛行のシミュレーション	50
第 7 章	結論	55
7.1	結論	55
7.2	今後の展望	56
	参考文献	57
	付録	60

A	陰関数定理 . . . . .	60
B	構成的陰関数定理 . . . . .	60
C	ハートマン=グロブマンの定理 . . . . .	63
	謝辞	64
	研究業績リスト	65

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 本研究の背景と目的

自立飛行型ドローン，特に自立飛行型マルチロータ（図 1.1）は，監視，輸送，探査，建物やインフラ設備の調査など様々な用途への模索が続いており，技術開発が進められている [1]-[17].



図 1.1 自立飛行型マルチロータの一例（ELEV-8 Quadcopter Kit をベースとする自作のクアッドロータ）

そして，自立飛行型マルチロータ（以下，マルチロータと省略する）の発展は経済規模を拡大し，各産業に大きな利益と社会に大きな利便をもたらすと期待されている．マルチロータは，マルチコプターという表現もよく使われるが，前者はより正確な表現であるため [1]，本論文では“マルチロータ”という表現を用いる．クアッドロータ（マルチロータの一種でモータ数 4）は，機械的シンプルさと制御の容易さから，航空力学およびロボット工学の分野で注目を集めているのは周知のとおりである．研究 [1], [3]-[12] などに見られるように，クアッドロータのモデリング，ダイナミクス（動力学），そして制御方法について広く研究され，ヘキサロータ（モータ数 6）やオクトロータ（モータ数 8）などのマルチロータにも広く応用されている．

しかしながら，飛行するマルチロータには，モータ故障や風などの外乱による墜落\*という潜在的リスクが存在する．したがって，完全なモータ故障の存在下でのマルチロータの飛行制御を考慮することは重要である．しかし，そのようなモータ制御を得る方法は完全には確立されていない．以下に，代表的な関連研究をまとめる．

---

\* 後者も重要な問題であるが，本論文では扱わない．

- Mueller と D'Andrea は、研究 [18] から発展させた方法を提案している。これは、1, 2 (対角線上の向かい合う 2 つ)、または 3 つのプロペラを失った場合に、クアッドロータの機体に固定した軸を中心に自由に回転させるという戦略を用いて位置を維持できるようにする方法である [19].
- Dongjie らは、モータ故障時の可制御性に基づいて、次のような i), ii) のマルチロータの最適な設計に関する信頼性を提案している。i) ロータ数の異なるマルチロータの可制御性解析。ii) 異なるロータ構成 (PNPNPN 型と PPNNPN 型, P は時計回りのロータ, N は反時計回りのロータを表す) を有するヘキサロータの可制御性解析 [20].
- Saied らは、4 対の同軸ロータを備えたオクトロータが 1 つまたは複数のモータを失った場合に、完全可制御性を維持できる完全なフォールトトレラント制御方法を提案し、連続または同時のモータ故障で良好な結果を得る実験的検証も提示した [21].
- Yu と Dong は、故障したアクチュエータを検出し、隔離することができるアルゴリズムを提案した。これがマルチロータのフライトコントローラの再構築の基礎となり、墜落回避のための制御の基盤となりえることを示した [22].
- Giribet らは、モータ角度のティルト構造を有するヘキサロータのモータの 1 つが完全に故障した場合、研究 [23] に基づいて完全な高度と姿勢制御を維持できることを理論的に証明し、その結果を実験的に検証した [24], [25].

多くのマルチロータ研究では、主に理論と現物の間を直感的に理解、整理しやすい、回転運動のオイラーの運動方程式 (以下、オイラー方程式と言う) を用いて理論的な部分を簡潔に述べ、最小の数の状態変数と入力変数の数値の順序リストによるベクトル表現 (例えば,  $[x, y, z, u, v, w]$ ) を用いたモデルを提案し利用している。多くの研究者がオイラー方程式を用いて剛体の動力学の基礎的な部分を周知の事実であるものとし、理論を簡潔に述べていることで、マルチロータの本当の状態変数であるオイラー角や、平衡点、動作点といった概念と、マルチロータの理論を結びつけるための、マルチロータのオイラー角の回転運動の一階の常微分方程式の形式があまり重要視されていない。そのため、マルチロータの平衡点、動作点、飛行状態、およびそれらを実現するためのモータの制御入力信号 (または飛行操作) に関する議論を行うことが困難になっている。

こういった背景に、マルチロータの動力学をオイラー角の角度とその角速度を状態変数とした状態変数アプローチによって記述する方法が確立されていないことが問題として挙げられる。ここで言う状態変数アプローチは、Kalman [26] の言う、システムの振る舞いを完全に記述する独立変数を、どう選択するかという意味で定義される。マルチロータの多くの制御の研究では、制御の目的のための状態変数を選択するため、Kalman の言う、マルチロータシステムの振る舞いを完全に記述する独立変数 (一般化座標のオイラー角と変位の 6 変数 [27]) になっていない。状態変数アプローチを用いてマルチロータの動力学を記述することによって始めて、いくつかの平衡点、動作点 (または、飛行状態) を達成するためのモータの制御方法を決定でき、マルチロータの飛行操作を完全に理解することが可能となる。そして、1 つまたはいくつかのモータが完全に故障したときに墜落を回避し飛行を維持し続けるためのモータの制御方法 (モータ故障問題\*) などについて詳細に議論することができる。

インターネット世界とジェット機、自動車などの現在の機械文明の礎となっている巨大集積回路

---

\* 本論文では、マルチロータのモータ故障時の墜落を回避する飛行状態の維持の問題という意味で“モータ故障問題”という言葉を使う。

(電子回路)の歴史において, 1950年代後半以降の回路理論では, 状態変数アプローチは, 信頼性の高い数値ソルバー [28] を使用して巨大集積回路を確実に解析するために非常に有効で, ますます一般的になったが, これらの単純な形式とは対照的に, マルチロータを制御するための動力学は複雑であったため, 系統的に状態変数アプローチが適用されてこなかったと考えられる.

本論文の主な研究目的を以下に記す.

1. Kalman の言う状態変数アプローチに基づき, オイラー角の角度と角速度の回転と並進における変位を状態変数に持つ状態方程式を導出する. そして, マルチロータの動力学の状態方程式を基礎に置き, マルチロータの飛行状態, 飛行操作, 平衡点と動作点の定義を行い, 平衡点と動作点と多くの応用におけるマルチロータの飛行操作と飛行状態の関係を明確に記述する. 加えて, 完全なモータ故障の存在下でのマルチロータの残存モータの数学的定義を与え, 飛行状態, 飛行操作, 平衡点と動作点の定義を行い, その平衡点と動作点とマルチロータの墜落を回避し飛行を維持する飛行操作と飛行状態 (特に, すべての飛行状態の制御が可能な状態と, ヨーの制御は不可能でその他の制御が可能な状態) の関係を明確に記述する.
2. 完全なモータ故障の存在下でのマルチロータの飛行状態, 飛行操作, 平衡点と動作点の定義を基礎に置き, 墜落を回避し飛行状態を維持するための残存モータ速度制御信号を求める方法を定理として与える. そして, 提案した定理を応用して, フィードフォワードの形式のマルチロータ (クアドロータ, ヘキサロータ, そしてオクトロータ) の完全なモータ故障存在下における墜落を回避する飛行状態の数値シミュレーションを行い, 定理の有効性を確認する.
3. マルチロータの完全なモータ故障の存在下で, 飛行状態を安定させる状態変数フィードバックを持つ線形または非線形の動力学の状態方程式について議論する. 特に, 完全なモータ故障の存在下で, すべての飛行操作が可能な場合のヘキサロータの墜落を回避する飛行状態の安定性の定理を提供し, 状態変数フィードバックを持つ非線形の動力学の状態方程式によって, そのような飛行状態を安定させることを, 定理としてまとめる. そして, 数値シミュレーションを行い定理の有効性を確認する.

## 1.2 本論文の概要

本論文の2章以降の概要を以下に述べる.

2章では, アーノルドの剛体の運動の記述方法 [29] を基礎に置き, マルチロータを剛体と見なし, その運動を記述するための数学的基礎についてまとめる. また, マルチロータの動力学の方程式の導出のために, 剛体の動力学にアーノルドの作用素 (オイラー角の相つぐ3つの回転の積行列のこと) を適用する. さらに, アーノルドの作用素を用いることで, オイラー角と静止座標系とマルチロータに張り付いている動座標系との関係が明確に記述できることを示す.

3章では, 2章を基礎に置き, マルチロータの動力学の状態方程式を導出する. 特に, マルチロータのオイラー角の角度と角速度を状態変数に持つ状態方程式を定理として, マルチロータのオイラー角の角度に依る並進における変位を状態変数に持つ状態方程式もまた定理として与える. 加えて, 本論

文で扱う，標準的な対称な形状を有するマルチロータの機体フレームの構成を記述する．

4章において，3章で導出したマルチロータの1階の形式の運動の常微分方程式を基礎に置き，マルチロータの飛行操作，飛行状態，および飛行の動作点（または平衡点）を定義し，それらの関係を明確に記述する．また，オイラー角の状態がマルチロータのそれぞれのモータの回転速度の制御によって，どのように達成されるかを与える，すなわち，それぞれのモータの回転速度の変化によって現在の動作点の状態から，計画した動作点の状態にどのように達成されるか把握できる定理を与える．そして，マルチロータの一定高度の飛行とホバリングの飛行を含む，任意の飛行状態がどのようなモータの回転速度の制御\*によって達成されるかを与える定理を与える．

さらに，完全なモータ故障が存在する場合の，マルチロータの残存モータのモータ速度制御信号ベクトルの定義を与え，モータ故障時の飛行操作，飛行状態，飛行の動作点（または平衡点）をそれぞれ定義し，それらの関係を明確に記述する．加えて，故障がない正常な場合の任意の飛行状態のためのモータの回転速度の制御を与える定理をモータ故障問題の形に拡張し，完全なモータ故障が存在する場合に墜落を回避する飛行状態のためのモータ速度制御信号（フィードフォワード制御）を直接求める定理を与える．

5章において，マルチロータ（クアッドロータ，ヘキサロータ，そしてオクトロータ）の正常な場合の一定高度の飛行とホバリングの飛行を含む，任意の飛行状態がどのようなモータの回転速度の制御（フィードフォワード制御）によって達成されるかを与える定理を適用した飛行制御の数値シミュレーションと，機体のモータが完全に故障した場合に墜落を回避する飛行状態のためのモータ速度制御信号（フィードフォワード制御）を直接与える定理を適用して，墜落を回避し飛行を維持する数値シミュレーションを行い，それぞれの定理の有効性を確認する．

6章では，ヘキサロータを例に，完全なモータ故障の存在下で，すべての飛行操作が可能な場合の飛行状態を安定させる状態変数フィードバックを持つ線形または非線形の動力学の状態方程式について議論する．特に，完全なモータ故障の存在下で，ヘキサロータの墜落を回避する飛行状態の安定性の定理を提供し，状態変数フィードバックを持つ非線形の動力学の状態方程式によって，そのような飛行状態を安定させることを，定理としてまとめる．そして，数値シミュレーションを行い定理の有効性を確認する．

7章の結論において，本研究の主な結果についてまとめ，今後の展望を述べる．

---

\* 任意の飛行状態のためのフィードフォワードの形で与えられる制御入力

## 第 2 章

# マルチロータの運動の数学的基礎

本章では、アーノルドの剛体の力学の記述 [29] を基礎に置き、マルチロータを剛体として、その運動の記述の数学的基礎についてまとめる。そして、アーノルドの作用素（オイラー角の相つぐ 3 つの回転の積行列）によって、オイラー角、静止座標系、動座標系間の関係を明確に記述できることを示す。加えて、マルチロータの動力学方程式の導出を容易にするため、剛体の動力学にアーノルドの作用素を適用する。

### 2.1 動座標系，ローカル座標系，静止座標系における運動

アーノルドの動座標系の記述 [29] のような以下の表記を使用する（図 2.1, 図 2.2）。

$\mathbb{R}^3$  は 3 次元の実ベクトル空間を表し、族  $V \subset \mathbb{R}^3$  は平行移動の族としてアフィン空間  $A^3$  に作用する：

$$a \rightarrow a + v, \quad a \in A^3, v \in V, a + v \in A^3. \quad (2.1)$$

$O_c + \text{span}\{E_1, E_2, E_3\}$ ,  $O_c + \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ , そして  $O + \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$  [30] はそれぞれ、動座標系（動軸系 [31]）、ローカル座標系（ローカル軸系 [31]）、そして静止座標系（慣性軸系 [31]）を表す。

$w: O + \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$  [30] は右手系のデカルト静止座標系の基底ベクトルであり原点は  $O$  である。  $W: O_c + \text{span}\{E_1, E_2, E_3\}$  (or  $O_c + \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ ) [30] は質量中心  $O_c$  で剛体に固定された右手系のデカルト動（または、ローカル）座標系の基底ベクトルである。

**定義 1**  $w, W$  を向きづけられた 3 次元 Euclid 空間とする。  $w$  に関する  $W$  の運動とは、アフィン変換 ([33], pp. 125–128)

$$T(t) : W \rightarrow w, \quad (2.2)$$

で計量と向きづけとを保つものである (図 2.1)。



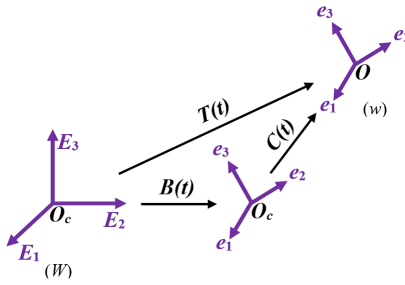


図 2.1 動座標系, ローカル座標系, と静止座標系

定義 2 運動  $T(t)$  が回転であるとは,  $T(t)$  が  $W$  の原点を  $w$  の原点へ移すとき, つまり  $T(t)$  が線形写像であるときをいう.

定理 ([29], p. 124) 全ての運動  $T(t)$  は回転  $B(t)$  と並進  $C(t)$  の合成として一意に書ける:

$$T(t) = C(t)B(t), \tag{2.3}$$

ここに  $C(t)q(t) = r(t) + q(t)$ ,  $(q(t), r(t) \in w)$ .

定義 3 運動  $T(t)$  が並進であるとは, 写像  $B(t): O_c + \text{span}\{E_1, E_2, E_3\} \rightarrow O_c + \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$  が時間  $t$  に依存しないことをいう. すなわち,  $B(t) = B(0) = B$ ,  $T(t)Q = r(t) + BQ$ .

定義 4  $w$  を静止座標系,  $W$  を動座標系,  $q \in w$  を静止座標系に関する動点の動径ベクトルと呼ぶ. もし,  $Q$  が,

$$q(t) = r(t) + B(t)Q(t) \tag{2.4}$$

であるとき,  $Q(t)$  を動座標系に関する動径ベクトルという (図 2.2).

以下において,  $r(t)$ , または  $\Omega(t)$  などのすべての時間パラメータ  $t$  の変数は, 便宜上省略する.

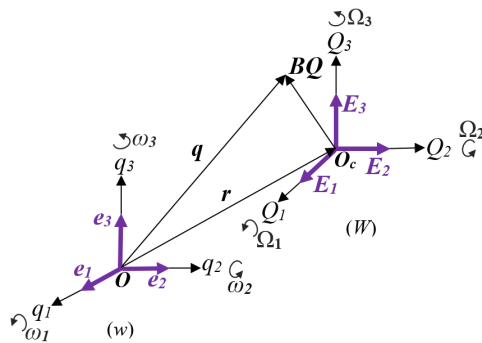


図 2.2 静止座標系 (w) と動座標系 (W) に関する動径ベクトル

“絶対速度”  $\dot{q}$  を相対運動  $Q$  と座標系の運動  $B$  とで表す. 式 (2.4) を時間  $t$  で微分すれば, 速度を合成する式 [式 (2.5)] が得られる.

$$\dot{q} = \dot{r} + \dot{B}Q + B\dot{Q}. \tag{2.5}$$

定義5 図 2.3 の角  $\psi, \theta$ , そして  $\phi$  ( $\psi, \theta, \phi \in \mathbb{R}$ ) はテイト=ブライアン角と呼ばれ, それはオイラー角のひとつであり, 以下のように定義する.

$$0 \leq \psi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}.$$

マルチロータが自由にヨーの回転 (角  $\psi$  の軸まわりの回転) をし続けるとき, 定義5 を満たす角  $\psi$  の変化を見るには, 次章以降に説明するオイラー角の角度と角速度を状態変数として持つ状態方程式の解  $\psi$  を, 次のモジュロ計算によって変換する必要があることに注意する  $\psi(t) = (\psi(t) + \pi) \bmod 2\pi - \pi$ . 本研究では特に問題がないため, モジュロ計算による変換は省略している.

静止座標系に固定された基底ベクトル  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を, 動座標系に固定された基底ベクトル  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) へ移すためには, 次の3つの回転を行う (図 2.3).

1. 軸  $e_3$  のまわりの角  $\psi$  の回転. このとき,  $e_3$  は動かさず,  $e_2$  は  $E_2^{(-2)}$  へ移る ( $R_\psi$  とおく (式 (2.7))).
2. 軸  $E_2^{(-2)}$  のまわりの角  $\theta$  の回転. このとき,  $E_2^{(-2)}$  は動かさず,  $E_1^{(-2)}$  は  $E_1^{(-1)}$  へ移る ( $R_\theta$  とおく (式 (2.8))).
3. 軸  $E_1^{(-1)}$  のまわりの角  $\phi$  の回転. このとき,  $E_1^{(-1)}$  は動かさず,  $E_3^{(-1)}$  は  $E_3$  へ移る ( $R_\phi$  とおく (式 (2.9))).

ここに  $E_i^{(l)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $l = -1, -2$  はローカル座標系  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と動座標系  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の間の正規直交基底を表す. 3つの回転を行うと,  $e_1$  は  $E_1$  へ,  $e_2$  は  $E_2$  へ, そして,  $e_3$  は  $E_3$  へ移る. 角  $\psi, \theta, \phi$  をテイト=ブライアン角という [27] (オイラー角のひとつ).

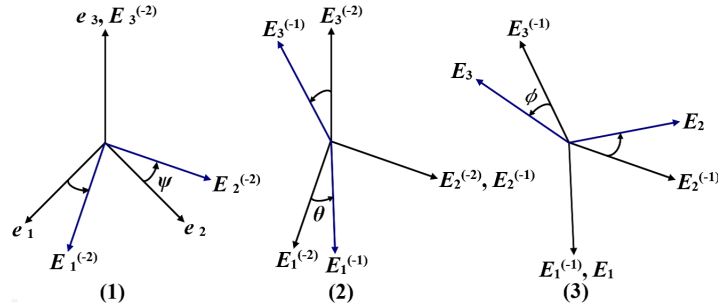


図 2.3 テイト=ブライアン角を定義する回転

以下のように, アーノルドの記述 [29] と同様に, テイト=ブライアン角の回転を作用素  $B(\psi, \theta, \phi) \in SO(3)$ :  $(\psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$  ( $\text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ )  $\rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $B(\psi, \theta, \phi)$ :  $O_c + \text{span}\{E_1, E_2, E_3\} \rightarrow O_c + \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$  として記述する.

$$B(\psi, \theta, \phi) = R_\psi R_\theta R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

動座標系の基底ベクトルを作用素  $\mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)$  を使って、以下のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)\mathbf{E}_1 \\ \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)\mathbf{E}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

ここに  $(\cdot)^T$  は  $(\cdot)$  の転置を表す記号である。

したがって、以下の関係式を得る。

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 Q_i \mathbf{E}_i \in W \text{ (or } \mathcal{O}_c + \text{span}\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 Q_i \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)\mathbf{E}_i \in \mathcal{O}_c + \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 Q_i \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)\mathbf{E}_i &= \sum_{i=1}^3 Q_i \left( \sum_{j=1}^3 \langle \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)\mathbf{E}_i, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^3 Q_i \left( \sum_{j=1}^3 \langle \mathbf{E}_i, \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)^T \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \left\langle \sum_{i=1}^3 Q_i \mathbf{E}_i, \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)^T \mathbf{e}_j \right\rangle \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 \langle \mathbf{Q}, \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)^T \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 \langle \mathbf{B}(\psi, \theta, \phi)\mathbf{Q}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここに  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は内積を表す記号である。

式(2.10)–(2.13)のような作用素  $\mathbf{B}$  を用いた場合の基底ベクトルの取り扱いについてのより詳細な議論は [32] を参照されたい。

以下において、作用素  $\mathbf{B}$  の角  $(\psi, \theta, \phi)$  は簡便のためしばしば省略される。

## 2.2 剛体の動力学

座標系  $W$  は剛体に固定された座標系なので、剛体の部分を表す  $\mathbf{Q}$  は静止して (すなわち、 $\dot{\mathbf{Q}} = 0$ ) 座標系  $W$  が回転している (すなわち、 $\mathbf{r} = 0$ )。この場合、 $\mathbf{q}$  の遷移回転の運動の速度は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{B}}\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{B}[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = \dot{\mathbf{r}} + [\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{B}\mathbf{Q}], \quad (2.14)$$

ここに  $[\cdot, \cdot]$  はベクトル積を意味する記号である。

$\boldsymbol{\Omega} \in W$  を剛体の角速度ベクトルという。この場合  $\boldsymbol{\Omega}$  は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\omega}. \quad (2.15)$$

ベクトル  $\omega \in w$  は、空間  $w$  における瞬間回転軸といい、次式で与えられる。

$$\omega = \dot{\psi}e_3 + \dot{\theta}E_2^{(-2)} + \dot{\phi}E_1^{(-1)}. \quad (2.16)$$

オイラー角の角速度ベクトル  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  は多くの論文、書籍などで、動座標系の基底ベクトル  $E_i, i = 1, 2, 3$  上の座標成分として表記されているが、式 (2.16) の記述が正しいことを強調しておく。式 (2.16) のオイラー角（テイト＝ブライアン角）の角速度ベクトルの場合、式 (2.14) は次のように書き換えられる。

$$\dot{q} = \dot{r} + \dot{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}(\mathbf{B}Q) + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{B}Q) + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(\mathbf{B}Q). \quad (2.17)$$

ここでは、より一般的な場合 ( $\dot{Q} \neq 0$ ) で議論を進める。マルチロータの形状が変化する場合や、アームなどを取り付けて、物を運ぶ際などがそれに相当する。式 (2.5) をもう一度時間  $t$  で微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \ddot{r} + \ddot{\mathbf{B}}Q + 2\dot{\mathbf{B}}\dot{Q} + \mathbf{B}\ddot{Q} \\ &= \ddot{r} + \mathbf{B}[\Omega, [\Omega, Q]] + \mathbf{B}[\dot{\Omega}, Q] + 2\mathbf{B}[\Omega, \dot{Q}] + \mathbf{B}\ddot{Q} \\ &= \ddot{r} + [\omega, [\omega, \mathbf{B}Q]] + [\dot{\omega}, \mathbf{B}Q] + 2[\omega, \mathbf{B}\dot{Q}] + \mathbf{B}\ddot{Q}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

ここに式 (2.18) の 3 項は次の“付加的”な慣性力に対応する。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}[\dot{\Omega}, Q] &: \text{回転の慣性力,} \\ 2\mathbf{B}[\Omega, \dot{Q}] &: \text{Coriolis の力,} \\ \mathbf{B}[\Omega, [\Omega, Q]] &: \text{遠心力.} \end{aligned}$$

$h \in w$  と  $H \in W$  を、それぞれ静止座標系と動座標系での剛体の角運動量とおく。さらに、 $\hat{I}$  を剛体の慣性モーメントとおくと、作用素  $\mathbf{B}$  により以下のような関係が成立する。

$$h = \hat{I}\omega = \mathbf{B}H \in w, \quad (2.19)$$

$$H = \hat{I}\Omega \in W. \quad (2.20)$$

さらに、 $\tau \in w$  を剛体にかかるトルク（外力のモーメント）とすると、角運動量の時間微分がモーメントと等しいという以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h = \tau &= \frac{d}{dt}\mathbf{B}H = \mathbf{B}T = \dot{\mathbf{B}}H + \mathbf{B}\dot{H} = \mathbf{B}[\Omega, H] + \mathbf{B}\dot{H}, \\ \mathbf{B}(\dot{H} + [\Omega, H] - T) &= \dot{H} + [\Omega, H] - T = \hat{I}\dot{\Omega} + [\Omega, H] - T = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

一般に、関係式 (2.21) をオイラー方程式と呼ぶ。

また、 $\Omega$  と  $\dot{\Omega}$  は、具体的にそれぞれ次のように表すことができる。

$$\Omega = (-\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi})E_1 + (\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi)E_2 + (\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi)E_3, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= (-\ddot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta + \ddot{\phi})E_1 \\ &+ (\ddot{\psi} \cos \theta \sin \phi - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi + \ddot{\theta} \cos \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi)E_2 \\ &+ (\ddot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi - \ddot{\theta} \sin \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi)E_3, \end{aligned} \quad (2.23)$$

式 (2.21) のトルク  $\boldsymbol{\tau}$  はまた、以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{f}]. \quad (2.24)$$

ここで、 $\boldsymbol{r}$  と  $\boldsymbol{f}$  は、それぞれ外力がかかる位置ベクトルと外力ベクトルを表す。  
剛体の角運動量の座標成分は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^3 H_i \boldsymbol{E}_i. \quad (2.25)$$

したがって、

$$(H_1, H_2, H_3)^T = \hat{\boldsymbol{I}}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T. \quad (2.26)$$

と書ける。

$\hat{\boldsymbol{I}}$  は剛体の慣性モーメントを表し、次式で定義する。

$$\hat{\boldsymbol{I}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{E}_k = I_{1k}\boldsymbol{E}_1 + I_{2k}\boldsymbol{E}_2 + I_{3k}\boldsymbol{E}_3. \quad (2.28)$$

本論文は、章 3.2 で定義する、標準的な対称な形状を有するマルチロータのみを扱うので、慣性モーメントの行列  $\hat{\boldsymbol{I}}$  について、対角成分以外は 0 ( $I_{kl} = 0$ , for  $k \neq l$ ) と仮定する。

## 第 3 章

# マルチロータの力学システムとしての状態方程式

本章は、前章を基礎に置き、マルチロータの動力学の状態方程式について議論する。特に、マルチロータのオイラー角の角度と角速度の回転を状態変数に持つ状態方程式を定理として、マルチロータのオイラー角に依る並進における変位を状態変数に持つ状態方程式もまた定理として与える。加えて、本論文で扱う、標準的な対称な形状を有するマルチロータの機体フレームの構成を記述する。

### 3.1 オイラー角の状態変数を持つマルチロータのオイラー＝ラグランジュ方程式

$\text{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$  を 3 次元右手系実ベクトル空間の基底ベクトル  $\mathbb{R}^3$  (すなわち、直交空間) とし、 $\boldsymbol{x} = (\psi, \theta, \phi)^\top$  と  $\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})^\top$  をそれぞれ式 (3.1) と式 (3.2) のように記述する。

$$\boldsymbol{x} = \psi \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \theta \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \phi \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \psi \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\eta}, \quad (3.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\psi} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dot{\phi} \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \dot{\psi} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \theta \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \phi \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad (3.3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dot{\phi} \boldsymbol{\varepsilon}_3. \quad (3.4)$$

剛体の状態変数として、瞬間角速度  $\boldsymbol{\Omega} \in W$  と並進の変数  $\boldsymbol{r}$  と  $\dot{\boldsymbol{r}}$  を選び、剛体のラグランジアン  $L$  を以下に定義する。

$$L = \frac{1}{2} m \langle \dot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{r}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle - mg \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_3 \rangle, \quad (3.5)$$

ここに  $m$  は剛体の総重量を表し、 $g$  は重力加速度を表す。そして、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は内積を表す記号である。

### 3.1.1 回転の方程式

一般化速度に関して、外部の一般化力（または、モーメント） $\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u})$  の仮想パワー [34] は、以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u}), \delta\omega \rangle &= \langle \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u}), \omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta)\delta\dot{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \langle \omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta)^\top \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u}), \delta\dot{\mathbf{x}} \rangle,\end{aligned}\quad (3.6)$$

ここに  $\omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta)^\top \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u})$  は一般化力、そして  $\mathbf{u} \in \Lambda \subset \mathbb{R}^\rho$ ,  $\rho \in \mathbb{N}$  はマルチロータに作用する外部の一般化力を制御するマルチロータの入力の  $\rho$  パラメータベクトルを表す [26].

したがって、マルチロータの回転の状態変数として変数  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  を選ぶと、マルチロータの回転のオイラー＝ラグランジュ方程式は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m\langle \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}(\mathbf{x})^\top \omega(\psi, \theta, \dot{\mathbf{x}}), \mathbf{B}(\mathbf{x})^\top \omega(\psi, \theta, \dot{\mathbf{x}}) \rangle - mg\langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_3 \rangle \\ &= \frac{1}{2}m\langle \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}(\mathbf{x})^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta) \cdot \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{B}(\mathbf{x})^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta) \cdot \dot{\mathbf{x}} \rangle - mg\langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_3 \rangle,\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{\mathbf{x}}}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) - L_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) = \omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta)^\top \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u}),\quad (3.8)$$

$$\omega(\psi, \theta, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}).\quad (3.9)$$

また、 $\omega(\psi, \theta, \dot{\mathbf{x}})$  と  $\omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta)$  は具体的に以下の式で与えられる。

$$\omega(\psi, \theta, \dot{\mathbf{x}}) = (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \psi)\mathbf{e}_1 + (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi)\mathbf{e}_2 + (\dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta)\mathbf{e}_3,\quad (3.10)$$

$$\omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \psi & \cos \theta \cos \psi \\ 0 & \cos \psi & \cos \theta \sin \psi \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{pmatrix}.\quad (3.11)$$

以下において、作用素  $\mathbf{B}$  の入力変数  $\mathbf{x}$  角度と  $\omega_{\dot{\mathbf{x}}}$  の入力変数  $\psi$  と  $\theta$  は簡便のためしばしば省略されている。

$$L_{\dot{x}_k} = \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\boldsymbol{\varepsilon}_k, \mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} \rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\boldsymbol{\varepsilon}_k \rangle,\quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_k} &= \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{I}}\dot{\mathbf{B}}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\boldsymbol{\varepsilon}_k + \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}\boldsymbol{\varepsilon}_k, \mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} \rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\boldsymbol{\varepsilon}_k, \dot{\mathbf{B}}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}^\top \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\ddot{\mathbf{x}} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{I}}\dot{\mathbf{B}}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\boldsymbol{\varepsilon}_k \rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{B}}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\boldsymbol{\varepsilon}_k + \mathbf{B}^\top \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}\boldsymbol{\varepsilon}_k \rangle \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_k^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}^\top \dot{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}_k^\top \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}^\top \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} \\ &\quad + \boldsymbol{\varepsilon}_k^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}^\top \dot{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}_k^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}^\top \mathbf{B}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}_k^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}^\top \mathbf{B}\hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\ddot{\mathbf{x}},\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}L_{x_k} &= \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}_{x_k}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}x_k}\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} \rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{B}_{x_k}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}x_k}\dot{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \dot{\mathbf{x}}^\top (\omega_{\dot{\mathbf{x}}}^\top \mathbf{B}_{x_k} + \omega_{\dot{\mathbf{x}}x_k}^\top \mathbf{B})\hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}^\top \omega_{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}},\end{aligned}\quad (3.14)$$

ここに  $k = 1, 2, 3$ .  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  は  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  の時間  $t$  による微分, そして  $\dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta, \dot{\psi}, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  は  $\omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta)$  の時間  $t$  による微分を表す. 行列の微分の定義 [35] (p. 248) を用いる. また, 作用素  $\mathbf{B}$  により  $\dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}^T \mathbf{B} = \boldsymbol{\Omega}_{\dot{\mathbf{x}}}^T$  という関係式が成り立つ. したがって, 式 (3.13) の項  $\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}^T \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}}$  と式 (3.14)  $L_{x_k}$  は等しい.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}^T \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^T (\omega_{\dot{\mathbf{x}}}^T \mathbf{B}_{x_k} + \omega_{\dot{\mathbf{x}} x_k}^T \mathbf{B}) \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad (3.15)$$

ここに  $k = 1, 2, 3$ .

その結果, 剛体の回転のベクトル方程式が次のように求まる.

$$\omega_{\dot{\mathbf{x}}}^T \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} + \omega_{\dot{\mathbf{x}}}^T \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} + \omega_{\dot{\mathbf{x}}}^T \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^T \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} + \omega_{\dot{\mathbf{x}}}^T \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} \ddot{\mathbf{x}} = \omega_{\dot{\mathbf{x}}}^T \mathbf{B} \mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u}). \quad (3.16)$$

$(\omega_{\dot{\mathbf{x}}}^T)^{-1}$  を式 (3.16) の両辺に掛け, 式 (3.17) の性質が式 (3.16) に適用されると, 次のように式 (3.18) が最終的に得られる.

$$\dot{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{B}^T \mathbf{B} [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}] = (0, 0, 0)^T, \quad (3.17)$$

$$\dot{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{B}}^T \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u}), \quad (3.18)$$

ここに  $(\mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})^T): \mathbf{x} = (\psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .  $(\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})^T): (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \in \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

ここで, マルチロータのオイラー角の角度と角速度の状態変数を含む明示的な形式の回転の動力学方程式の定理 1 を与える.

定理 1

$$\text{もし } \det(\mathbf{B} \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}}) = -I_{11} I_{22} I_{33} \cos \theta \neq 0 \text{ ならば,} \quad (3.19)$$

マルチロータの回転の状態の動力学方程式はオイラー角の角度と角速度の状態変数  $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})^T \in \Sigma_{\text{rot}} \subset \mathbb{R}^6$  とマルチロータに与える一般化力を制御する入力ベクトル関数  $\mathbf{u} \in \Lambda \subset \mathbb{R}^{\rho}$  を用いて以下のように明示的に記述される.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})^T \cdot \omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta))^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) = -(\mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})^T \cdot \omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta))^{-1} (\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})^T \cdot \omega_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})^T \cdot \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi, \theta, \dot{\psi}, \dot{\theta})) \cdot \dot{\mathbf{x}}, \quad (3.22)$$

ここに  $t \in \mathbb{R}$  は時間を表す.  $\mathbf{x} = (\psi, \theta, \phi)^T = (\psi, \boldsymbol{\eta})^T$ ,  $\boldsymbol{\eta} = (\theta, \phi)^T$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})^T = (\dot{\psi}, \dot{\boldsymbol{\eta}})^T$ ,  $\dot{\boldsymbol{\eta}} = (\dot{\theta}, \dot{\phi})^T$ , そして  $\rho \in \mathbb{N}$ .

証明 1 式 (3.18) を式 (3.23) に再整理する.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{B} \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ -(\dot{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^T \omega_{\dot{\mathbf{x}}} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{B}}^T \dot{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$



ここに  $I_{3 \times 3}$  は  $3 \times 3$  の恒等行列,  $\mathbf{0}_{3 \times 3}$  は  $3 \times 3$  のゼロ行列を表す.

式 (3.23) の左辺の行列  $\begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & B\hat{I}B^T\omega_{\dot{\mathbf{x}}}$  \end{pmatrix} が非特異であるとき, 式 (3.23) は式 (3.20) に変換される. そして, 行展開式 [36] から, 以下の式を得る.

$$\det \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & B\hat{I}B^T\omega_{\dot{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} = \det(B\hat{I}B^T\omega_{\dot{\mathbf{x}}}), \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \det(B\hat{I}B^T\omega_{\dot{\mathbf{x}}}) &= \det(B)\det(\hat{I})\det(B^T)\det(\omega_{\dot{\mathbf{x}}}) \\ &= -I_{11}I_{22}I_{33} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.25)$$

$\det(B) = \det(B^T) = 1$ ,  $\det(\hat{I}) = I_{11}I_{22}I_{33}$ ,  $\det(\omega_{\dot{\mathbf{x}}}) = -\cos \theta$  から式 (3.25) が成り立つ. したがって, もし  $\det(\hat{I}) \neq 0$ ,  $\theta \neq \pi/2$  [rad] であるとき式 (3.20) が成り立つ. 単純な行列計算を使用すると, 式 (3.21) の関数が状態変数  $\psi, \dot{\mathbf{x}}$  を持たないこと, 式 (3.22) の関数が状態変数  $\psi$  を持たないことが容易に検証される. よって, 前述の議論から証明を終える.  $\square$

### 3.1.2 並進の方程式

マルチロータの並進の状態変数として変数  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  を選ぶと, オイラー・ラグランジュ方程式は以下の式で与えられる.

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{\mathbf{r}}}(\dot{\mathbf{r}}) - L_{\mathbf{r}} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{\text{tra}}(\mathbf{u}), \quad (3.26)$$

ここに,  $\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{\text{tra}}(\mathbf{u})$  は一般化力 (いわゆる推力) と見なされる.

したがって, マルチロータの並進のベクトル方程式が次のように求まる.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{\text{tra}}(\mathbf{u}). \quad (3.27)$$

よって, マルチロータの並進の状態方程式を以下のようにまとめられる.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{\text{tra}}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

上記の計算に基づいて, 以下に, 明示的な形式のマルチロータのための並進の状態方程式の定理 2 を与える.

**定理 2**  $(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))^T$  を定理 1 の式 (3.20) の解とする. そして, 明示的な形式のマルチロータのための並進の変位と速度の状態方程式は以下のように与えられる.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{B}(\phi_1(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T, \mathbf{u}))\mathbf{F}_{\text{tra}}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}; \quad (3.29)$$

ここに, 初期値  $(t_0, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T) \in \mathbb{R} \times \Sigma_{\text{rot}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6$  と  $\mathbf{u} \in \Lambda$  を持つ  $(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))^T = (\phi_1(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T, \mathbf{u}), \phi_2(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T, \mathbf{u}))^T = \phi(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T, \mathbf{u}) \in \Sigma_{\text{rot}} \subset \mathbb{R}^6$ .

**証明 2** マルチロータの並進の状態方程式は式 (3.28) である. そして, 式 (3.28)  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  のオイラー角  $\mathbf{x}$  は, 式 (3.20) の解  $\phi_1(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T, \mathbf{u})$  で与えられる. よって, 式 (3.28) は式 (3.29) に書き換えられる. 証明終わり.  $\square$

### 3.2 標準的な対称な形状を有するマルチロータの機体フレーム構成

本論文で議論するマルチロータは, [20] と同様に, 全てのロータは同じであり, 均等に, 同一平面上に配置され, マルチロータの幾何学的中心からの距離は等しいことを仮定する. マルチロータはロータの数で区別され, クアッドロータ, ヘキサロータ, オクトロータが良く知られている. 図 3.1–3.3 に示すように, 隣接しているロータの番号を反時計回りに番号付けする.

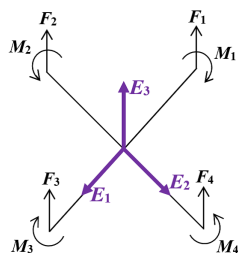


図 3.1 標準的な構成のクアッドロータ

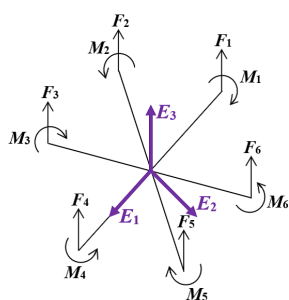


図 3.2 標準的な構成のヘキサロータ

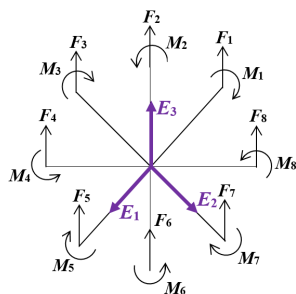


図 3.3 標準的な構成のオクトロータ

図 3.1–3.3 の  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2p$ ,  $p = 2, 3, 4$ ) と  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2p$ ,  $p = 2, 3, 4$ ) はそれぞれ, 垂直の力とモーメントを表している. マルチロータのそれぞれのモータは角速度  $\omega_i$  を持っており,  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2p$ ,  $p = 2, 3, 4$ ) と  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2p$ ,  $p = 2, 3, 4$ ) は以下のように [12] と同様に定義

されている。ここに  $2p$ ,  $p = 2, 3, 4$  は飛行に使われるマルチロータの機体に固定されたモータの個数を表す ( $p = 2$ : クアッドロータ,  $p = 3$ : ヘキサロータ,  $p = 4$ : オクトロータ)。

$$F_i = k_{Fi}\omega_{Mi}^2, \quad i = 1, 2, \dots, 2p, \quad p = 2, 3, 4, \quad (3.30)$$

$$M_i = k_{Mi}\omega_{Mi}^2, \quad i = 1, 2, \dots, 2p, \quad p = 2, 3, 4. \quad (3.31)$$

実際には,  $k_F > 0$  と  $k_M > 0$  が静的なスラスト試験で簡単に決定できる定数として与えられるような単純な集中定数モデルが適用される。標準的な対称な形状を有するマルチロータに, 次のように  $p$  のバリエーションを適用し, クアッドロータ ( $p = 2$ ), ヘキサロータ ( $p = 3$ ), そしてオクトロータ ( $p = 4$ ) に対して, 式 (3.20) のモーメント  $\mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u})$  と式 (3.29) の並進の力  $\mathbf{F}_{\text{tra}}(\mathbf{u})$  をそれぞれ  $\mathbf{S}_{\text{rot}2p}\mathbf{u}_{2p}$  と  $\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p}$ ,  $p = 2, 3, 4$  と置いて, 以下のように定義する。

クアッドロータ ( $p = 2$ ),

$$\mathbf{S}_{\text{rot}4} = \begin{pmatrix} 0 & -\ell \cdot k_{F2} & 0 & \ell \cdot k_{F4} \\ \ell \cdot k_{F1} & 0 & -\ell \cdot k_{F3} & 0 \\ -k_{M1} & k_{M2} & -k_{M3} & k_{M4} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{S}_{\text{rot}4} : \text{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{M1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{M2}, \boldsymbol{\varepsilon}_{M3}, \boldsymbol{\varepsilon}_{M4}\} \rightarrow \text{span}\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{u}_4 = (\omega_{M1}^2, \omega_{M2}^2, \omega_{M3}^2, \omega_{M4}^2)^\top. \quad (3.34)$$

ヘキサロータ ( $p = 3$ ),

$$\mathbf{S}_{\text{rot}6} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\ell \cdot k_{F2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\ell \cdot k_{F3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \cdot k_{F5} & \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \cdot k_{F6} \\ \ell \cdot k_{F1} & 0.5\ell \cdot k_{F2} & -0.5\ell \cdot k_{F3} & -\ell \cdot k_{F4} & -0.5\ell \cdot k_{F5} & 0.5\ell \cdot k_{F6} \\ -k_{M1} & k_{M2} & -k_{M3} & k_{M4} & -k_{M5} & k_{M6} \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{S}_{\text{rot}6} : \text{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{M1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{M2}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{M6}\} \rightarrow \text{span}\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{u}_6 = (\omega_{M1}^2, \omega_{M2}^2, \dots, \omega_{M6}^2)^\top. \quad (3.37)$$

オクトロータ ( $p = 4$ ),

$$\mathbf{S}_{\text{rot}8} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cdot k_{F2} & -\ell \cdot k_{F3} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cdot k_{F4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cdot k_{F6} & \ell \cdot k_{F7} & \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cdot k_{F8} \\ \ell \cdot k_{F1} & \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cdot k_{F2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cdot k_{F4} & -\ell \cdot k_{F5} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cdot k_{F6} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \cdot k_{F8} \\ -k_{M1} & k_{M2} & -k_{M3} & k_{M4} & -k_{M5} & k_{M6} & -k_{M7} & k_{M8} \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{S}_{\text{rot}8} : \text{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{M1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{M2}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{M8}\} \rightarrow \text{span}\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{u}_8 = (\omega_{M1}^2, \omega_{M2}^2, \dots, \omega_{M8}^2)^\top. \quad (3.40)$$

マルチロータ ( $p = 2, 3, 4$ ) の並進の力,

$$\mathbf{S}_{\text{tra}2p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{F1} & k_{F2} & \cdots & k_{F2p} \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{S}_{\text{tra}2p} : \text{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{M1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{M2}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{M2p}\} \rightarrow \text{span}\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{u}_{2p} = (\omega_{M1}^2, \omega_{M2}^2, \dots, \omega_{M2p}^2)^\top, \quad (3.43)$$

ここに  $\text{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{M1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{M2}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{M2p}\}$  は右手系  $2p$  次元実ベクトル空間の基底ベクトルを表す.

したがって, 標準的な対称な形状を有するマルチロータ  $p = 2, 3, 4$  の状態方程式は以下のようにまとめられる.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}_{\text{rot}2p}\mathbf{u}_{2p} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{B}(\boldsymbol{\phi}_1(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^\top, \mathbf{u}_{2p}))\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p} \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

ここに  $\mathbf{u}_{2p} \in \Lambda_{2p} \subset \mathbb{R}^{2p}$  である.

## 第 4 章

# マルチロータの飛行状態と飛行操作，および飛行の動作点

本章では，マルチロータの動力学の状態方程式を基礎に置き，マルチロータの飛行操作<sup>\*</sup>，飛行状態，そして飛行の動作点（または平衡点）を定義し，それらの関係を明確に記述する．また，オイラー角の状態がマルチロータのそれぞれのモータの回転速度の制御によって，どのように達成されるかを与える，すなわち，それぞれのモータの回転速度の変化によって現在の動作点の状態から，計画した動作点の状態にどのように達成されるかを把握できる定理を与える．そして，マルチロータの一定高度の飛行とホバリングの飛行を含む，任意の飛行状態がどのようなモータの回転速度の制御（フィードフォワード制御）によって達成されるかを与える定理を与える．さらに，完全なモータ故障が存在する場合のマルチロータの残存モータのモータ速度制御信号ベクトルの定義を与え，モータ故障時の墜落を回避する飛行操作，飛行状態，そして飛行の動作点（または平衡点）をそれぞれ定義し，それらの関係を明確に記述する．加えて，故障がない正常な場合の回転速度の制御を与える定理をモータ故障問題の形に拡張し，完全なモータ故障が存在する場合に墜落を回避する飛行状態のためのモータ速度制御信号（フィードフォワード制御）を直接求める定理を与える．

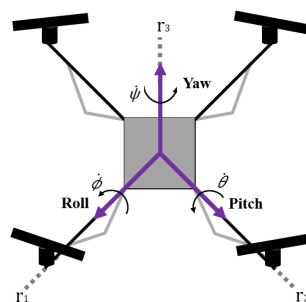


図 4.1 テイト=ブライアン角のヨー角，ロール角，ピッチ角がほぼゼロである場合のクアッドロータの回転運動と並進運動の飛行状態．オイラー角の回転角の範囲の定義 5 の記述から，テイト=ブライアン角の状態を簡単に説明できないことに注意されたい．

<sup>\*</sup> マルチロータの任意の飛行状態を実現するモータ制御のこと．フライトマヌーバまたはフライトコントロールとも言う．

表 4.1 マルチロータのフライトマヌーバと飛行状態 (図 4.1)

フライトマヌーバ	関連する状態変数	飛行状態
(i-1) 高度を上げる制御	$r_3$ 方向, $\frac{d}{dt}r_3 > 0$	重力下でマルチロータが浮き, 上方向に動く.
(i-2) 高度を下げる制御	$r_3$ 方向, $\frac{d}{dt}r_3 < 0$	重力下でマルチロータが浮き, 下方向に動く.
(ii) ホバリングする制御	$r_3$ 方向, $r_1 = r_2 = r_3 = 0, \frac{d}{dt}r_1 = \frac{d}{dt}r_2 = \frac{d}{dt}r_3 = 0, \dot{\psi} = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$	重力下でマルチロータが浮き平衡状態にあり, 回転運動はなく, 空中の 1 つの場所で停止する.
(iii-1) 正方向のヨーの回転の制御	$\psi, 0 \leq \psi < 2\pi, \dot{\psi} > 0$	その場で反時計回りのヨーの回転をする.
(iii-2) 負方向のヨーの回転の制御	$\psi, -2\pi < \psi \leq 0, \dot{\psi} < 0$	その場で時計回りのヨーの回転をする.
(iv-1) 正方向のピッチの回転の制御	$r_1$ 方向, $\frac{d}{dt}r_1 > 0, \theta, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} > 0$	ピッチが反時計回り (正方向) に回転し, 機首が下がり, 機尾が持ち上がり, 前方向に加速し始める.
(iv-2) 負方向のピッチの回転の制御	$r_1$ 方向, $\frac{d}{dt}r_1 < 0, \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0, \dot{\theta} < 0$	ピッチが時計回り (負方向) に回転し, 機首が持ち上がり, 機尾が下がり, 後ろ方向に加速し始める.
(v-1) 正方向のロールの回転の制御	$r_2$ 方向, $\frac{d}{dt}r_2 < 0, \phi, 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}, \dot{\phi} > 0$	ロールが反時計回りに回転し, 機体の右側が下がり, 機体の左側が持ち上がり, 右方向に加速し始める.
(v-2) 負方向のロールの回転の制御	$r_2$ 方向, $\frac{d}{dt}r_2 > 0, \phi, -\frac{\pi}{2} < \phi \leq 0, \dot{\phi} < 0$	ロールが時計回りに回転し, 機体の右側が持ち上がり, 機体の左側が下がり, 左方向に加速し始める.

回転の運動のオイラー角の状態変数  $\mathbf{x} = (\psi, \theta, \phi)^T$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})^T$  と並進の運動の状態変数  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ ,  $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{r}_3)^T$  (図 4.1) を用いて, マルチロータの飛行操作 (フライトマヌーバ) と飛行状態を表 4.1 にまとめる. マルチロータは飛行に  $2p$  個の機体に固定されたモータを用いる (クアッドロータ  $p = 2$ , ヘキサロータ  $p = 3$ , そしてオクトロータ  $p = 4$ ). モータの角速度ベクトル  $\mathbf{u}_{2p}$  は表 4.1 の飛行状態 (または動作点) を達成するために直接使われる. 選択した飛行状態または動作点を達成するためには, モータの制御方法など, マルチロータのマヌーバを理解することが重要である.

オイラー角を状態変数とする状態方程式 [式 (3.44)]  $\frac{d}{dt}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})^T = (\mathbf{0}_3, \mathbf{0}_3)^T$ ,  $\mathbf{0}_3 = (0, 0, 0)^T$  を保持するとき, ヨー  $\psi$ , ピッチ  $\theta$ , そしてロール  $\phi$  の動きは固定される. 次に, 並進の変位を状態変数と

する状態方程式 [式 (3.45)] が示すように,  $\ddot{\mathbf{r}}$  は  $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}_1(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T, \mathbf{u})$  に依存するため,  $r_i$  の運動は  $\frac{d}{dt}\dot{r}_i = \langle \mathbf{e}_i, \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p} \rangle$ ,  $i = 1, 2$  でそれぞれ与えられる. マルチロータの  $r_3$  の運動は,  $\frac{d}{dt}\dot{r}_3 = \langle \mathbf{e}_3, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p} \rangle$  によって与えられる高度を常に維持または制御する.

以下において, マルチロータの動作点と平衡点の定義 6 を与える.

#### 4.1 マルチロータの動作点 (または, 飛行状態), 飛行操作に関する諸定理

**定義 6** マルチロータの動作点 (または, 飛行の動作点とも言う)  $(\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x}_{\text{op}} = (\psi_{\text{op}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{op}})^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_{\text{op}} = (\theta_{\text{op}}, \phi_{\text{op}})^T$ , そして  $(\mathbf{r}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{r}}_{\text{op}})^T \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  は以下の式によって決定される.

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}} \\ \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}})\mathbf{S}_{\text{rot}2p}\mathbf{u}_{2p(\text{op})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{\text{op}} \\ \langle \mathbf{e}_3, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}})\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p(\text{op})} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 \\ c \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}})\hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}})^T \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{x}}(\psi_{\text{op}}, \theta_{\text{op}}))^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}}), \quad (4.3)$$

$$\ddot{r}_1 = \langle \mathbf{e}_1, \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}})\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p(\text{op})} \rangle, \quad (4.4)$$

$$\ddot{r}_2 = \langle \mathbf{e}_2, \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}})\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p(\text{op})} \rangle, \quad (4.5)$$

$$\ddot{r}_3 = c, \quad (4.6)$$

ここに  $c \in \mathbb{R}$  は定数,  $\mathbf{0}_3 = (0, 0, 0)^T$  である. もし  $c = 0$  ならば動作点  $(\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T$  と  $(\mathbf{r}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{r}}_{\text{op}})^T$  は定高度飛行の状態にある. さらにもし  $\ddot{r}_1 = \ddot{r}_2 = 0$  かつ  $c = 0$  ( $\ddot{r}_3 = 0$ ) ならば飛行の動作点を平衡点  $(\mathbf{x}_e, \dot{\mathbf{x}}_e)^T$  と  $(\mathbf{r}_e, \dot{\mathbf{r}}_e)^T$  と呼び, ホバリングの飛行状態にある.

マルチロータの動作点の定義を用いて以下の定理 3, 4 が導出される.

**定理 3**  $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x})$  を  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p} \in \mathbb{R}^{2p}$  と  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  の近傍の領域で  $\mathbb{R}^3$  の値域を持つ  $C^1$  関数とおく. さらに式 (4.1) と式 (4.2) を用いて与えられ,  $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}$  を満たすとする. 具体的には以下のように定義されるものとする.

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}_{\text{rot}2p}\mathbf{u}_{2p} \rangle \\ \langle \mathbf{e}_j, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p} \rangle \\ \langle \mathbf{e}_3, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p} \rangle \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{I}}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{x}}(\psi, \theta))^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (4.8)$$

ここに  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq 2$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{c} = (0, \ddot{r}_j, c)^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $\ddot{r}_j, c \in \mathbb{R}$  はある定数,  $\mathbf{x} = (\psi, \boldsymbol{\eta})^T$ ,  $\boldsymbol{\eta} = (\theta, \phi)^T$  である.

このとき, もし  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  と  $\mathbf{e}_j$  が,  $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}})$  が逆行列を持つように選択できれば, 全ての  $\mathbf{u}_{2p} \in U$  に対して,  $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p})) = \mathbf{c} = (0, \ddot{r}_j, c)^T$  と  $\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}) = \tilde{\mathbf{x}}$  を満足するような  $C^1$  関数  $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  と  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p}$  の近

傍  $U$  が存在する. さらに  $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{z}) = \mathbf{c}$  を満足する  $V$  の中の唯一の解  $\mathbf{z}$  が存在するような, すなわち  $\mathbf{z} = \mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p})$  であるような  $\tilde{\mathbf{x}}$  の近傍  $V$  ( $V$  は  $\mathbf{x}(U)$  の像である) が存在する中で  $\mathbf{x}$  は唯一である. さらに (i)  $\mathbf{x}$  の微分, すなわち  $3 \times 2p$  行列  $d\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p})$  は以下のように陰的微分演算によって計算できる.

$$d\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}) = -[\mathbf{H}_x(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}))^{-1} \mathbf{H}_{u_{2p}}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}))]. \quad (4.9)$$

(ii)  $\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}), \mathbf{u}_{2p} \in U$  は以下のように  $(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}})$  でのアフィン近似によって近似される.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}) &\approx \tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}) \cdot (\mathbf{u}_{2p} - \tilde{\mathbf{u}}_{2p}) \\ &= \tilde{\mathbf{x}} - [\mathbf{H}_x(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{H}_{u_{2p}}(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}})] \cdot (\mathbf{u}_{2p} - \tilde{\mathbf{u}}_{2p}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

(iii)  $\tilde{\psi}$  は以下のように決定される.

$$\tilde{\psi} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p} \mathbf{u}_{2p} \rangle. \quad (4.11)$$

**証明 3** 式 (4.2) の 4 行目  $\langle \mathbf{e}_3, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p} \mathbf{u}_{2p} \rangle$  と式 (4.8) の関数は状態変数  $\psi$  を含んでおらず,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p} \mathbf{u}_{2p})$  はランク 2 である. さらに, 定理 1 と式 (3.44) から, 状態変数  $\psi$  は状態変数  $\theta$  と  $\phi$  に直接影響を与えないことは明らかである. そして,  $\tilde{\psi}$  は  $\psi$  と  $\dot{\psi}$  の代わりに, 式 (3.44)  $\dot{\psi} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{Y}((\theta, \phi)^T, (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})^T) + \mathbf{Z}((\theta, \phi)^T) \mathbf{S}_{\text{rot}2p} \mathbf{u}_{2p} \rangle$  によってのみ直接決定される. したがって,  $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x})$  と  $\mathbf{c}$  の構築は, 解析可能で合理的かつ効果的に行われる.

$\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{u}_{2p} \in \mathbb{R}^{2p}$ , そして  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  は付録の陰関数定理の  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , そして  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  にそれぞれ置き換えることができるので, 付録の陰関数定理と同様の結果が得られる. さらに, (iii) の結果は式 (3.44) の 3 行目から得られることは明らかである. かくして, 定理 3 は証明された.  $\square$

定理 3 のクアッドロータの応用例を以下に示す. 具体的な数値パラメータの値は図 4.2 に示される. これらのパラメータは, 5 章で示されるパラメータと同一である.

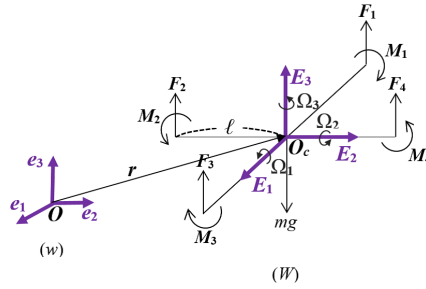


図 4.2 座標系とクアッドロータにモータによって作用する垂直方向の力/モーメント ( $m = 1.656$  [kg],  $g = 9.80665$  [m/s<sup>2</sup>],  $\ell = 0.365$  [m],  $I_{11} = 0.01982$  [kg · m<sup>2</sup>],  $I_{22} = 0.01954$  [kg · m<sup>2</sup>],  $I_{33} = 0.03221$  [kg · m<sup>2</sup>],  $k_F = 1.79 \times 10^{-7}$  [N/rpm<sup>2</sup>],  $k_M = 4.38 \times 10^{-9}$  [Nm/rpm<sup>2</sup>])

$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\psi} [\text{rad}], \tilde{\theta} [\text{rad}], \tilde{\phi} [\text{rad}])^T = (0 [\text{rad}], 0.5236 [\text{rad}], 0 [\text{rad}])^T$ , そして  $\tilde{\mathbf{u}}_4 = (\tilde{\omega}_{M1} [\text{rpm}], \tilde{\omega}_{M2} [\text{rpm}], \tilde{\omega}_{M3} [\text{rpm}], \tilde{\omega}_{M4} [\text{rpm}])^T = (5118.6279 [\text{rpm}], 5117.6279 [\text{rpm}], 5117.6279 [\text{rpm}], 5118.6279 [\text{rpm}])^T$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{u}_4), \mathbf{u}_4 \in U$  は上記の  $(\tilde{\mathbf{u}}_4, \tilde{\mathbf{x}})$  における以下のアフィン変換によって推定される.



$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{u}_4) \approx & \tilde{\mathbf{x}} - \\ & \begin{pmatrix} -0.7946 \times 10^{-5} & 0.7946 \times 10^{-5} & -0.7946 \times 10^{-5} & 0.7946 \times 10^{-5} \\ -0.1653 \times 10^{-7} & -0.1653 \times 10^{-7} & -0.1653 \times 10^{-7} & -0.1653 \times 10^{-7} \\ -0.3973 \times 10^{-5} & 0.3973 \times 10^{-5} & -0.3973 \times 10^{-5} & 0.3973 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \\ & \cdot (\mathbf{u}_4 - \tilde{\mathbf{u}}_4). \end{aligned} \quad (4.12)$$

ここに  $\dot{\psi}$  は定理 3 の項目 (iii) によって決定される。定理 3 は、それぞれのモータ速度の変化に応じて変化するオイラー角の状態を推定できる。

**定理 4**  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2p})$  を  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  と  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p} \in \mathbb{R}^{2p}$  の近傍の領域で  $\mathbb{R}^{2p}$ ,  $p = 2, 3, 4$  の値域を持つ  $C^1$  関数とおく。さらに式 (4.1) と式 (4.2) の下の行、それぞれ  $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}})\mathbf{S}_{\text{rot}2p}\mathbf{u}_{2p(\text{op})}$  と  $\langle \mathbf{e}_3, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}})\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p(\text{op})} \rangle$  を用いて与えられ、 $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}_{2p}) = \mathbf{0}_{2p} = (0, 0, \dots, 0)^T$  を満たすとする。具体的には以下のように定義されるものとする。

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2p}) = \mathbf{A}_{2p}(\mathbf{x})\mathbf{u}_{2p} - \mathbf{b}_{2p}. \quad (4.13)$$

クアッドロータ ( $p = 2$ ) の場合,

$$\mathbf{A}_4(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}_{\text{rot}4} \\ \mathbf{e}_3^T \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{S}_{\text{tra}4} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

ここに  $\mathbf{b}_4 = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, c + g)^T \in \mathbb{R}^4$ ,  $c \in \mathbb{R}$  は定数を表す。

ヘキサロータまたはオクトロータ ( $p = 3$  または  $4$ ) の場合,

$$\mathbf{A}_{2p}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{2p \times 2p} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{4 \times 2p}(\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{Q}_{(2p-4) \times 2p} \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{A}'_{4 \times 2p}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{4 \times 2p} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}_{\text{rot}2p} \\ \mathbf{e}_3^T \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{S}_{\text{tra}2p} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

ここに  $\mathbf{Q}_{(2p-4) \times 2p} \in \mathbb{R}^{(2p-4) \times 2p}$  は定数行列を表す。 $\mathbf{b}_{2p} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, c + g, \mathbf{b}'_{2p-4})^T \in \mathbb{R}^{2p}$ .  $\mathbf{b}'_{2p-4} \in \mathbb{R}^{2p-4}$  は定数ベクトルを表す。

任意の  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  で、 $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}_{2p}) = \mathbf{0}_{2p}$ ,  $\det(\mathbf{A}_{2p}(\tilde{\mathbf{x}})) \neq 0$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p} \in \mathbb{R}^{2p}$  であれば、 $\tilde{\mathbf{u}}_{2p} = \mathbf{A}_{2p}(\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\mathbf{b}_{2p}$  は一意に定まる。そして  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  は以下で決定される。

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}_{\text{rot}2p}\mathbf{u}_{2p} \rangle, \\ \dot{\theta} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}_{\text{rot}2p}\mathbf{u}_{2p} \rangle, \\ \dot{\phi} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}_3, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}_{\text{rot}2p}\mathbf{u}_{2p} \rangle. \end{aligned} \quad (4.17)$$

**証明 4** クアッドロータ ( $p = 2$ ) の場合、 $\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^2$  は定数ベクトルであり、 $\mathbf{A}_4(\tilde{\boldsymbol{\eta}})$  は  $4 \times 4$  の定数行列である。ヘキサロータまたはオクトロータ ( $p = 3$  または  $4$ ) の場合、 $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  は定数ベクトルであり、 $\mathbf{A}'_{4 \times 2p}(\tilde{\mathbf{x}})$  は  $4 \times 2p$  の定数行列である。さらに、 $\mathbf{Q}_{(2p-4) \times 2p}$  は  $(2p-4) \times 2p$  の定理の条件を満たすある定数行列である。

したがって、任意の  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{A}_{2p}(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{u}}_{2p} - \mathbf{b}_{2p} = \mathbf{0}_{2p}$  で  $\det(\mathbf{A}_{2p}(\tilde{\mathbf{x}})) \neq 0$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p} \in \mathbb{R}^{2p}$  であれば一意に  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p} = \mathbf{A}_{2p}(\tilde{\mathbf{x}})^{-1}\mathbf{b}_{2p}$  が定まる。そして  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  は式 (3.44) の第 4–6 行目  $\mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}_{\text{rot}2p}\mathbf{u}_{2p}$  から得られる。こうして定理 4 の証明を終える。  $\square$

マルチロータは通常は無線送信機を用いる標準的な無線操縦 R/C の模型飛行機のようにコントロールされている。R/C のシステムは模型飛行機の制御用に設定されており、マルチロータの制御用には作られていない。そのため R/C のシステムでマルチロータの制御命令を入力する時にどのような翻訳がされるかを知ることが重要となる。マルチロータのフライト制御ボードが通常の模型飛行機の制御命令を解釈してそれらを適切なモータの回転速度制御信号に翻訳する時に制御の差異が発生する [16]。無線送信機は、模型飛行機に、Throttle, Rudder, Elevator, そして Ailerons のそれぞれの制御信号を独立に送信できる少なくとも 4 つの独立のチャンネルを持っている。送信機の左側のスティックは Throttle と Rudder の両方を制御する。しかるに、送信機の右側のスティックは Ailerons と Elevator の両方を制御する。これらの名前は固定翼の制御翼が由来である。これらの翼は翼の周りの空気の流れの向きを変化させて飛行機の飛ぶ向きを変化させるフラップである。マルチローターでは throttle, rudder, elevator, そして ailerons は通常 altitude (高度), yaw (ヨー), pitch (ピッチ), roll (ロール) に対応する [15]。

定理 3 はオイラー角の状態  $\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p})$  がそれぞれのモータの回転速度の制御  $\mathbf{u}_{2p} \in U$  によって、どのように達成されるかを与える。さらに  $\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}), \mathbf{u}_{2p} \in U$  の条件下で、式 (3.45) は並進の加速度ベクトル  $\ddot{\mathbf{r}} = -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{B}(\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}))\mathbf{S}_{\text{tra}2p}\mathbf{u}_{2p}$  を決定する。式 (3.45) と定理 3 を用いて、それぞれのモータの回転速度  $\mathbf{u}_{2p}$  の変化によって現在の動作点の状態から、計画した動作点の状態にどのように達成されるかを把握できる。

定理 4 は、定理の条件を満足する条件下で、マルチロータの任意の飛行状態 (特に、変数  $\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, c$  (または  $\dot{r}_3$ )) がどのようなモータの回転速度の制御  $\mathbf{u}_{2p} \in U$  によって達成されるかを一意解 (フィードフォワード制御の形) として与える。

定理 3 または定理 4 を用いることで、通常の模型飛行機の制御命令の throttle (または altitude), rudder (または yaw), elevator (または pitch), そして ailerons (または roll) をそれぞれ対応するモータの回転速度の制御入力に翻訳し、無線送信機のための有効な“翻訳”を定義できる。

## 4.2 完全なモータ故障の存在下でマルチロータの墜落を回避し、飛行を維持する飛行状態と飛行操作の問題

本節では、完全なモータ故障が存在する場合のマルチロータの残存モータ（故障していないモータ）の定義を与え、モータ故障時の墜落を回避する飛行操作、飛行状態、飛行の動作点（または平衡点）をそれぞれ定義し、それらの関係を明確に記述する。加えて、故障がない正常な場合の飛行状態のためのモータの回転速度の制御を与える定理をモータ故障問題の形に拡張し、完全なモータ故障が存在する場合に墜落を回避する飛行状態のためのモータ速度制御信号（フィードフォワード制御）を直接求める定理を与える。

モータナンバー  $i$  が完全に故障し停止したことを、基底ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}_{Mi}$  の張る部分空間  $V_i \subset \mathbb{R}^{2p}$  で表す [36], pp. 628–632. そして、 $V_i$  への上への射影を  $\mathbf{P}_i$  とする [36], pp. 628–632. ベクトル  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2p}$  の  $V_i$  上への射影  $\mathbf{P}_i \mathbf{v}$  は、直交関係を満足するベクトル  $\mathbf{P}_i \mathbf{v} \in V_i$  として定義される

$$\langle \mathbf{v} - \mathbf{P}_i \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{0} \text{ for all } \mathbf{w} \in V_i, \quad (4.18)$$

$$\langle \mathbf{P}_i \mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}_{Mi} \rangle = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}_{Mi} \rangle. \quad (4.19)$$

定義 7 モータナンバー  $i$  が完全に故障し停止した場合、残存モータベクトルは以下のように決定される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{2p-1}^i &= \mathbf{u}_{2p} - \mathbf{P}_i \mathbf{u}_{2p} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \omega_{Mj}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{Mj} + \sum_{j=i+1}^{2p} \omega_{Mj}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{Mj}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

また、 $\mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u}_{2p-1}^i)$  と  $\mathbf{F}_{\text{tra}}(\mathbf{u}_{2p-1}^i)$  はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{u}_{2p-1}^i) = \mathbf{S}_{\text{rot}2p} \mathbf{u}_{2p-1}^i = \mathbf{S}_{\text{rot}2p-1}^i \mathbf{u}_{2p-1}^i, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{F}_{\text{tra}}(\mathbf{u}_{2p-1}^i) = \mathbf{S}_{\text{tra}2p} \mathbf{u}_{2p-1}^i = \mathbf{S}_{\text{tra}2p-1}^i \mathbf{u}_{2p-1}^i, \quad (4.22)$$

ここに  $\mathbf{S}_{\xi 2p-1}^i$  行列は、 $\mathbf{S}_{\xi 2p}$  行列の  $i$  列目が削除された行列を表す ( $\xi = \text{rot}, \text{tra}$ ).

定義 8 モータナンバー  $i_1\text{th}, i_2\text{th}, \dots, i_n\text{th}$  ( $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq 2p, 1 \leq n \leq 2p-2, p = 2, 3, 4, n \in \mathbb{N}$ ) が完全に故障し停止した場合、残存モータベクトルは以下のように決定される。

$$\mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \sum_{j=1}^{i_1-1} \omega_{Mj}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{Mj} + \sum_{j=i_1+1}^{i_2-1} \omega_{Mj}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{Mj} + \dots + \sum_{j=i_n+1}^{2p} \omega_{Mj}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{Mj}. \quad (4.23)$$

また、残存モータによるモーメント  $\mathbf{S}_{\text{rot}2p} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$  と並進の力  $\mathbf{S}_{\text{tra}2p} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ ,  $p = 2, 3, 4$  はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\mathbf{S}_{\text{rot}2p} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{S}_{\text{tra}2p} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}, \quad (4.25)$$

ここに  $\mathbf{S}_{\xi 2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$  行列は、 $\mathbf{S}_{\xi 2p}$  行列の  $i_1\text{th}, i_2\text{th}, \dots, i_n\text{th}$  列目が削除された行列を表す ( $\xi = \text{rot}, \text{tra}$ ).

例 1 ヘキサロータのモータナンバー 1 番, 3 番, と 5 番が完全に故障し停止した場合 (図 4.3), 残存モータベクトルは以下のように決定される.

$$\mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \mathbf{u}_3^{1,3,5} = \omega_{M2}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{M2} + \omega_{M4}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{M4} + \omega_{M6}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{M6}, \quad (4.26)$$

ここに  $i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 5$ , そして  $n = 3$ .

$\mathbf{S}_{\text{rot}3} \mathbf{u}_3^{1,3,5}$  と  $\mathbf{S}_{\text{tra}3} \mathbf{u}_3^{1,3,5}$  はそれぞれ以下のように与えられる.

$$\mathbf{S}_{\text{rot}3} \mathbf{u}_3^{1,3,5} = \mathbf{S}_{\text{rot}3}^{1,3,5} \mathbf{u}_3^{1,3,5}, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{S}_{\text{tra}3} \mathbf{u}_3^{1,3,5} = \mathbf{S}_{\text{tra}3}^{1,3,5} \mathbf{u}_3^{1,3,5}, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{S}_{\text{rot}3}^{1,3,5} \mathbf{u}_3^{1,3,5} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \ell \cdot k_{F2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \cdot k_{F6} \\ 0.5 \ell \cdot k_{F2} & -\ell \cdot k_{F4} & 0.5 \ell \cdot k_{F6} \\ k_{M2} & k_{M4} & k_{M6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{M2}^2 \\ \omega_{M4}^2 \\ \omega_{M6}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{S}_{\text{tra}3}^{1,3,5} \mathbf{u}_3^{1,3,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{F2} & k_{F4} & k_{F6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{M2}^2 \\ \omega_{M4}^2 \\ \omega_{M6}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

ここに  $\mathbf{S}_{\xi 3}^{1,3,5}$  行列は,  $\mathbf{S}_{\xi 6}$  行列の 1, 3, そして 5 列目が削除された行列を表す ( $\xi = \text{rot, tra}$ ).

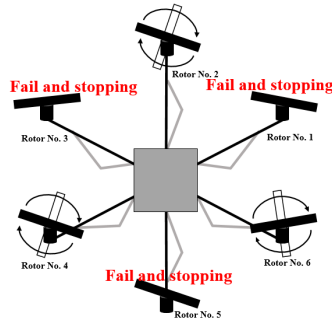


図 4.3 1 番, 3 番, と 5 番のモータが故障した場合のヘキサロータ

ここで, オイラー角の回転の方程式 [式 (3.44)] と並進の変位の方程式 [式 (3.45)] を基礎に置き, 完全なモータ故障の存在下の標準的な対称な形状を有するマルチロータ ( $p = 2, 3, 4$ ) の状態方程式は次のようにまとめられる.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ -g \mathbf{e}_3 + \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

完全なモータ故障の存在下, マルチロータの動作点と平衡点は, 特定のモータが故障し停止した場合に墜落を回避する表 4.2 の 2 タイプの飛行状態に関係付けることができる.

以下において、特定のモータが故障し停止したときに墜落を回避する表 4.2 の飛行状態を達成するためのマルチロータの動作点と平衡点の定義 9 を与える。また、特定のモータが故障し停止したときに墜落を回避する表 4.2 の飛行状態を達成するための、残存モータ速度制御信号を与える定理 5 と定理 6 を定義 9 を基礎に置き、与える。

特定のモータが故障して停止した場合の、マルチロータの墜落を回避する 2 タイプの飛行状態を表 4.2 のように仮定する。

表 4.2 マルチロータの墜落を回避する 2 種類の飛行状態

タイプ	達成する表 4.1 の飛行状態
(I) No Problem <sup>*1</sup>	全て (例 図 4.4)
(II) Admissible Problem <sup>*2</sup>	ヨーは制御できない。ヨーは自由に回転する (例 図 4.5).

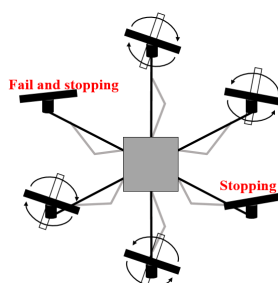


図 4.4 モータが故障、停止して、ひとつの残存モータを停止することで、ヘキサロータの表 4.1 のすべての飛行状態を達成する表 4.2 のタイプ (I) の例

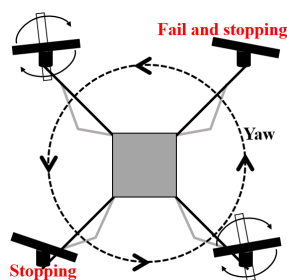


図 4.5 モータが故障、停止して、ひとつの残存モータを停止することで、クアッドロータの表 4.1 の“ヨーの制御を除く”すべての飛行状態を達成する表 4.2 のタイプ (II) の例

注意 ヘキサロータ ( $p = 3$ , 図 3.2) の対角線上の 2 つのモータの回転方向は等しいので、モータが 4 個故障し対角線上の 2 つのモータのみが残った場合 ( $n = 4$ )、表 4.2 の種類 (I) のマルチロータの墜落を避

<sup>\*1</sup> タイプ (I) 残存モータのうち、特定のモータが故障して停止した場合、表 4.1 の全ての飛行状態を達成するには、一部のモータを停止する必要がある。

<sup>\*2</sup> タイプ (II) 残存モータのうち、特定のモータが故障して停止した場合、表 4.1 の全ての飛行状態（ヨーの制御を除く）を達成するには、一部のモータを停止する必要がある。

タイプ (I) と (II) は完全なモータ故障の深刻度レベルを表す。タイプ (I) と (II) は定理 5 の式 (4.42) の形によって決定される。タイプ (II) はヨーの制御ができないので、タイプ (I) よりも深刻である。

ける飛行状態を達成することは現実的でない。そのため、ヘキサロータのモータが4個故障した場合は本論文では扱わない。したがって、ヘキサロータのモータ故障については、 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq 2p$ ,  $1 \leq n \leq 2p-3$ ,  $p=3$ ,  $n \in \mathbb{N}$  となる。

**定義 9** 特定のモータが故障して停止すると、墜落を回避する飛行状態 (表 4.2) を達成するマルチロータの動作点と平衡点  $(\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^{\text{T}} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x}_{\text{op}} = (\psi_{\text{op}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{op}})^{\text{T}}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_{\text{op}} = (\theta_{\text{op}}, \phi_{\text{op}})^{\text{T}}$ , そして  $(\mathbf{r}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{r}}_{\text{op}})^{\text{T}} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  は以下の式によって決定される。

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}} \\ \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n(\text{op})}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{3(\text{op})} \\ \langle \mathbf{e}_3, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n(\text{op})}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}}) \hat{\mathbf{I}} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}})^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}(\psi_{\text{op}}, \theta_{\text{op}}))^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}}), \quad (4.35)$$

$$\ddot{r}_1 = \langle \mathbf{e}_1, \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n(\text{op})}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle, \quad (4.36)$$

$$\ddot{r}_2 = \langle \mathbf{e}_2, \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n(\text{op})}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle, \quad (4.37)$$

$$\ddot{r}_3 = c, \quad (4.38)$$

ここに  $c \in \mathbb{R}$  は定数,  $\mathbf{0}_3 = (0, 0, 0)^{\text{T}}$  である。もし  $c = 0$  ならば動作点  $(\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^{\text{T}}$  と  $(\mathbf{r}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{r}}_{\text{op}})^{\text{T}}$  は定高度飛行の状態にある。さらにもし  $\ddot{r}_1 = \ddot{r}_2 = 0$  かつ  $c = 0$  ( $\ddot{r}_3 = 0$ ) ならば動作点を平衡点  $(\mathbf{x}_e, \dot{\mathbf{x}}_e)^{\text{T}}$  と  $(\mathbf{r}_e, \dot{\mathbf{r}}_e)^{\text{T}}$  と呼び、ホバリングの飛行状態にある。

表 4.2 のタイプ (II) の飛行状態の場合、式 (4.33) の 1 行目 ( $\dot{\psi}$ ) と 4 行目 ( $\ddot{\psi}$ ) は自動的に決定される。したがって、式 (4.33) は次のように書き換えられる。

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{\text{op}} \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n(\text{op})}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}_3, \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n(\text{op})}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

$$\ddot{\psi} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle, \quad (4.40)$$

$$\dot{\psi} = c_{\psi} t + \dot{\psi}(0), \quad (4.41)$$

ここに  $c_{\psi} \in \mathbb{R}$  は定数を表す。

注意 この場合、ヨーの制御は行えないため、表 4.1 の“(ii) ホバリングする制御”は達成できない。

**定理 5** 特定のモータが故障し停止したときの、墜落を回避する表 4.2 のタイプ (I) の飛行状態の場合、 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n})$ ,  $p = 2, 3, 4$  をオイラー角の角度の状態変数  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  と残存モータのモータ速度制御信号ベクトル  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{2p-n}$  の近傍で  $\mathbb{R}^{2p-n}$  の値域を持つ  $C^1$  関数とおく。さらに式 (4.33) と式 (4.34) の下の行、それぞれ  $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n(\text{op})}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$  と  $\langle \mathbf{e}_3, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n(\text{op})}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle$  を用いて与

えられ,  $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}) = \mathbf{0}_{2p-n} = (0, 0, \dots, 0)^T$  を満たすとする. 具体的には以下のように定義されるものとする.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}) = \mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} - \mathbf{b}_{2p-n}. \quad (4.42)$$

クアッドロータ ( $p=2$ ) の場合,

$$\mathbf{A}_{4-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{(4-n) \times (4-n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}4-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \\ \mathbf{e}_3^T \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}4-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

ここに  $\mathbf{b}_{4-n} = (\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}, c + g)^T \in \mathbb{R}^{4-n}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  は定数を表す.

ヘキサロータまたはオクトロータ ( $p=3$  または  $4$ ) の場合,

$$\mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(2p-n) \times (2p-n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{4 \times (2p-n)}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{Q}_{(2p-4) \times (2p-n)}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{A}'_{4 \times (2p-n)}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{4 \times (2p-n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \\ \mathbf{e}_3^T \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

ここに  $\mathbf{Q}_{(2p-4) \times (2p-n)}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{(2p-4) \times (2p-n)}$  は任意の定数行列を表す.  $\mathbf{b}_{2p-n} = (\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}, c + g, \mathbf{b}'_{2p-4})^T \in \mathbb{R}^{2p-n}$ .  $\mathbf{b}'_{2p-4} \in \mathbb{R}^{2p-4}$  は定数ベクトルを表す.

任意の  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  で,  $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}) = \mathbf{0}_{2p-n}$ ,  $\det(\mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\mathbf{x}})) \neq 0$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{2p-n}$  であれば,  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{b}_{2p-n}$  は一意に定まる. そして  $\ddot{\psi}$ ,  $\ddot{\theta}$ , と  $\ddot{\phi}$  は以下で決定される.

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle, \\ \ddot{\theta} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle, \\ \ddot{\phi} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}_3, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle. \end{aligned} \quad (4.46)$$

したがって,  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{2p-n}$  はモータ故障時の墜落を回避する表 4.2 のタイプ (I) の飛行状態のためのモータ速度制御信号ベクトルを与える.

**証明 5** クアッドロータ ( $p=2$ ) の場合,  $\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^2$  は定数ベクトルであり,  $\mathbf{A}_{4-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\boldsymbol{\eta}})$  は  $(4-n) \times (4-n)$  の定数行列である. ヘキサロータまたはオクトロータ ( $p=3$  または  $4$ ) の場合,  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  ( $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\psi}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})^T$ ) は定数ベクトルであり,  $\mathbf{A}'_{4 \times (2p-n)}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\boldsymbol{\eta}})$  は  $4 \times (2p-n)$  の定数行列である. さらに,  $\mathbf{Q}_{(2p-4) \times (2p-n)}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$  は  $(2p-4) \times (2p-n)$  の定理の条件を満たすある定数行列である.

したがって, 任意の  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\mathbf{x}}) \tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} - \mathbf{b}_{2p-n} = \mathbf{0}_{2p-n}$  で  $\det(\mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\mathbf{x}})) \neq 0$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{2p-n}$  であれば一意に  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{b}_{2p-n}$  が定まる. そして  $\ddot{\psi}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\phi}$  は式 (4.31) の第 4–6 行目  $\mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$  から得られる. こうして定理 5 の証明を終える.  $\square$

**定理 6** 特定のモータが故障し停止したときの, 墜落を回避する表 4.2 のタイプ (II) の飛行状態の場合,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n})$ ,  $p=2, 3, 4$  をオイラー角の角度の状態変数  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  と残存モータのモータ速度制御信号ベクトル  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{2p-n}$  の近傍で  $\mathbb{R}^{2p-n}$  の値域を持つ  $C^1$  関数とおく. さらに式 (4.39) と式 (4.34) の下の行, それぞれ  $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n(\text{op})}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$  と  $\langle \mathbf{e}_3, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n(\text{op})}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle$  を用いて与えられ,  $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}) = \mathbf{0}_{2p-n} = (0, 0, \dots, 0)^T$  を満たすとする. 具体的には以下のように定義されるものとする.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}) = \mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} - \mathbf{b}_{2p-n}. \quad (4.47)$$

クアドロータ ( $p=2$ ) の場合,

$$\mathbf{A}_{4-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{(4-n) \times (4-n)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \\ \mathbf{e}_3^T \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

ここに  $\mathbf{b}_{4-n} = (\ddot{\theta}, \ddot{\phi}, c + g)^T \in \mathbb{R}^{4-n}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  は定数を表す.

ヘキサロータまたはオクトロータ ( $p=3$  または  $p=4$ ),

$$\mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(2p-n) \times (2p-n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{3 \times (2p-n)}''^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{Q}_{(2p-4) \times (2p-n)}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

$$\mathbf{A}_{3 \times (2p-n)}''^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times (2p-n)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \\ \mathbf{e}_3^T \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

ここに  $\mathbf{Q}_{(2p-4) \times (2p-n)}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{(2p-4) \times (2p-n)}$  は任意の定数行列を表す.  $\mathbf{b}_{2p-n} = (\ddot{\theta}, \ddot{\phi}, c + g, \mathbf{b}'_{2p-4})^T \in \mathbb{R}^{2p-n}$ .  $\mathbf{b}'_{2p-4} \in \mathbb{R}^{2p-4}$  は定数ベクトルを表す.

任意の  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  で,  $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}) = \mathbf{0}_{2p-n}$ ,  $\det(\mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\mathbf{x}})) \neq 0$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{2p-n}$  であれば,  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{b}_{2p-n}$  は一意に定まる. そして  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\theta}$ , と  $\tilde{\phi}$  は以下で決定される.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle, \\ \tilde{\theta} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle, \\ \tilde{\phi} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}_3, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle. \end{aligned} \quad (4.51)$$

したがって,  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{2p-n}$  はモータ故障時の墜落を回避する表 4.2 のタイプ (II) の飛行状態のためのモータ速度制御信号ベクトルを与える.

**証明 6** クアドロータ ( $p=2$ ) の場合,  $\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^2$  は定数ベクトルであり,  $\mathbf{A}_{4-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\boldsymbol{\eta}})$  は  $(4-n) \times (4-n)$  の定数行列である. ヘキサロータまたはオクトロータ ( $p=3$  または  $4$ ) の場合,  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  ( $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\psi}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})^T$ ) は定数ベクトルであり,  $\mathbf{A}_{3 \times (2p-n)}''^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\boldsymbol{\eta}})$  の  $3 \times (2p-n)$  の定数行列である. さらに,  $\mathbf{Q}_{(2p-4) \times (2p-n)}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$  は  $(2p-4) \times (2p-n)$  の定理の条件を満たすある定数行列である.

したがって, 任意の  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\mathbf{x}}) \tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} - \mathbf{b}_{2p-n} = \mathbf{0}_{2p-n}$  で  $\det(\mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\mathbf{x}})) \neq 0$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{2p-n}$  であれば一意に  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\tilde{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{b}_{2p-n}$  が定まる. そして  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\phi}$  は式 (4.31) の第 4-6 行目  $\mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$  から得られる. こうして定理 6 の証明を終える.  $\square$

このように  $\tilde{\mathbf{u}}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{2p-n}$  は, モータ故障時の墜落を回避する表 4.2 の飛行状態を達成するモータ速度制御信号として得られる. モータの故障数  $n$  が増えるにつれて, 行列  $\mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{3 \times (2p-n)}$  または行列  $\mathbf{S}_{\text{tra}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{3 \times (2p-n)}$  のランクと入力ベクトル  $\mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{2p-n}$  の次元は減少する. したがって, 行列  $\mathbf{A}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{(2p-n) \times (2p-n)}$  がモータ故障によって正方行列でなくなった場合, 任意の行を減らして正方行列にする必要がある. また, 表 4.2 のタイプ (II) の状態の場合, 式 (4.48) や式 (4.50) に見られるように, ヨーの情報  $\boldsymbol{\varepsilon}_1^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$  は最初から削除されているとみなしていることに注意する.



## 第 5 章

# 定理を応用したフィードフォワード形式のマルチロータの飛行シミュレーション

本章では、モータ故障が発生していない正常な場合のマルチロータの表 4.1 の飛行状態と、完全なモータ故障の存在下、墜落を回避する表 4.2 の 2 タイプの飛行状態の飛行の典型例を数値シミュレーションによって示し、定理 4-6 の有効性を確認する。以下の数値シミュレーションは、マルチロータの変分微分方程式を用いた状態フィードバック制御ではなく、定理 4-6 を用いて得られた、一意の制御入力によるフィードフォワード制御で行っていることに注意する。

クアッドロータ ( $p = 2$ )、ヘキサロータ ( $p = 3$ )、そしてオクトロータ ( $p = 4$ ) の数値パラメータは表 5.1, 5.2, そして 5.3 に記述する。数値計算に必要なマルチロータのパラメータ、総重量  $m$ 、慣性モーメント  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$ 、マルチロータの中心からモータまでの距離  $\ell$ 、モータの推力とモーメントに関する係数  $k_F, k_M$ 、そしてこれらのパラメータは ELEV-8 Quadcopter Kit [15], [16] をベースとする自作のクアッドロータシステム [37] から決定している。

表 5.1 クアッドロータ ( $p = 2$ ) の数値パラメータ

記号	説明	値と単位
$m$	クアッドロータの総重量	1.656 [kg]
$I_{11}$	クアッドロータの慣性モーメント	0.01982 [kg · m <sup>2</sup> ]
$I_{22}$	クアッドロータの慣性モーメント	0.01954 [kg · m <sup>2</sup> ]
$I_{33}$	クアッドロータの慣性モーメント	0.03221 [kg · m <sup>2</sup> ]
$g$	重力加速度	9.80665 [m/s <sup>2</sup> ]
$k_F$	クアッドロータのモータの力の係数	$1.79 \times 10^{-7}$ [N/rpm <sup>2</sup> ]
$k_M$	クアッドロータのモータのモーメントの係数	$4.38 \times 10^{-9}$ [Nm/rpm <sup>2</sup> ]
$\ell$	クアッドロータの幾何学的中心からモータまでの距離	0.365 [m]

表 5.2 ヘキサロータ ( $p = 3$ ) の数値パラメータ

記号	説明	値と単位
$m$	ヘキサロータの総重量	2 [kg]
$I_{11}$	ヘキサロータの慣性モーメント	0.02973 [kg · m <sup>2</sup> ]
$I_{22}$	ヘキサロータの慣性モーメント	0.02931 [kg · m <sup>2</sup> ]
$I_{33}$	ヘキサロータの慣性モーメント	0.048315 [kg · m <sup>2</sup> ]
$g$	重力加速度	9.80665 [m/s <sup>2</sup> ]
$k_F$	ヘキサロータのモータの力の係数	$1.79 \times 10^{-7}$ [N/rpm <sup>2</sup> ]
$k_M$	ヘキサロータのモータのモーメントの係数	$4.38 \times 10^{-9}$ [Nm/rpm <sup>2</sup> ]
$\ell$	ヘキサロータの幾何学的中心からモータまでの距離	0.365 [m]

表 5.3 オクトロータ ( $p = 4$ ) の数値パラメータ

記号	説明	値と単位
$m$	オクトロータの総重量	3.5 [kg]
$I_{11}$	オクトロータの慣性モーメント	0.03964 [kg · m <sup>2</sup> ]
$I_{22}$	オクトロータの慣性モーメント	0.03908 [kg · m <sup>2</sup> ]
$I_{33}$	オクトロータの慣性モーメント	0.06442 [kg · m <sup>2</sup> ]
$g$	重力加速度	9.80665 [m/s <sup>2</sup> ]
$k_F$	オクトロータのモータの力の係数	$1.79 \times 10^{-7}$ [N/rpm <sup>2</sup> ]
$k_M$	オクトロータのモータのモーメントの係数	$4.38 \times 10^{-9}$ [Nm/rpm <sup>2</sup> ]
$\ell$	オクトロータの幾何学的中心からモータまでの距離	0.365 [m]

加えて、シミュレーションで用いる定理 4-6 の条件を満足する定数行列  $\mathbf{Q}_{(2p-4) \times 2p} \in \mathbb{R}^{(2p-4) \times 2p}$ ,  $p = 3$  または  $4$  を以下に定義する.

ヘキサロータ ( $p = 3$ ),

$$\mathbf{Q}_{2 \times 6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

オクトロータ ( $p = 4$ ),

$$\mathbf{Q}_{4 \times 8} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

## 5.1 完全なモータ故障が存在しない，正常な場合のマルチロータの飛行状態，飛行操作のシミュレーション

本節では，モータ故障が発生していない正常な場合のマルチロータの機体の表 4.1 の飛行状態の飛行の典型例を数値シミュレーションによって示す．以降の結果は，定理 4 や動力学の状態方程式 [式 (3.44)], [式 (3.45)] の実装を Maple のシンボリック計算，MATLAB の行列計算，そして ode45 ソルバー [38] を含む MATLAB の数値計算を用いて行い，得ている．ここで注意すべきは，式 (3.45) の数値計算にはオイラー角  $(\psi(t), \theta(t), \phi(t))$  が必要であるため，式 (3.44) の計算結果のタイムステップと式 (3.45) を解く際のタイムステップのずれを補間する補間関数 [39] を用いてオイラー角  $\psi(t), \theta(t)$ ，そして  $\phi(t)$  の解を得ている．以下に示すように，通常の飛行制御のコマンド（例えば，高さ，ヨー，ピッチ，そしてロールなど）をモータ速度制御信号に変換できていることが分かる．

(a) クアッドロータのホバー状態（図 5.1, 図 5.2, 表 4.1 のマヌーバ (ii)），条件  $\tilde{\theta} = 0$  [rad],  $\tilde{\phi} = 0$  [rad],  $\tilde{\psi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>], そして  $c = 0$  [m/s<sup>2</sup>] は，定理 4 から求めた以下のモータ速度によって実現される．

$$\tilde{\omega}_{M1} = \tilde{\omega}_{M2} = \tilde{\omega}_{M3} = \tilde{\omega}_{M4} = 4762.4891 \text{ [rpm]}.$$

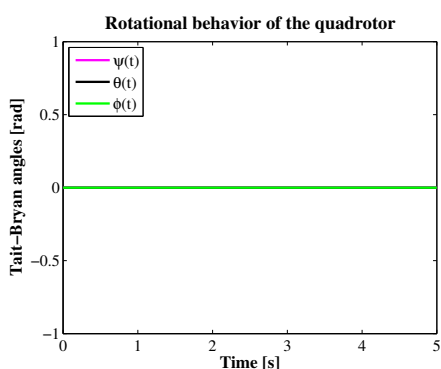


図 5.1 (a) クアッドロータのホバー状態のテイト＝ブライアン角のシミュレーション結果

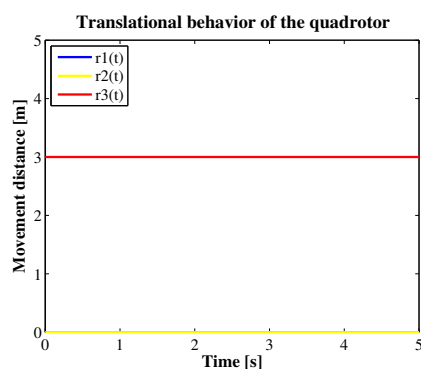


図 5.2 (a) クアッドロータのホバー状態の位置の動きのシミュレーション結果 ( $r_3 = 3$  [m]: 初期状態)

ここで，図 5.1 の  $\psi(t), \theta(t), \phi(t)$  のプロット，図 5.2 の  $r_1(t)$  と  $r_2(t)$  のプロットは完全に重なっている．シミュレーション (a) をとおして，定理によって求めたモータ制御入力信号で姿勢  $(\psi(t), \theta(t), \phi(t))$  や位置  $(r_1(t), r_2(t), r_3(t))$  に偏差が発生することなく，ホバリングの状態（表 4.1 のマヌーバ (ii)）が維持されていることが確かめられた．

(b) クアッドロータのホバー状態からヨー状態（図 5.3, 図 5.4, 表 4.1 のマヌーバ (iii-1)），条件  $\tilde{\theta} = 0$  [rad],  $\tilde{\phi} = 0$  [rad],  $\tilde{\psi} = 2$  [rad/s<sup>2</sup>], そして  $c = 0$  [m/s<sup>2</sup>] は，定理 4 から求めた以下のモータ速度に

よって実現される。

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{M1} &= \tilde{\omega}_{M3} = 4359.3992 \text{ [rpm]}, \\ \tilde{\omega}_{M2} &= \tilde{\omega}_{M4} = 5134.0279 \text{ [rpm]}.\end{aligned}$$

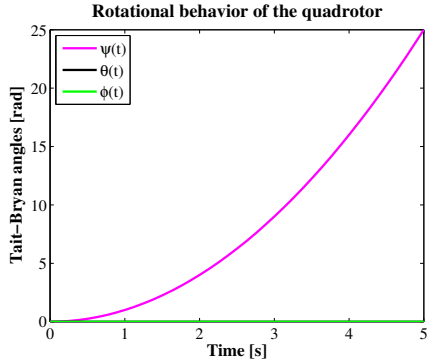


図 5.3 (b) クアッドロータのホバー状態からヨー状態のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果

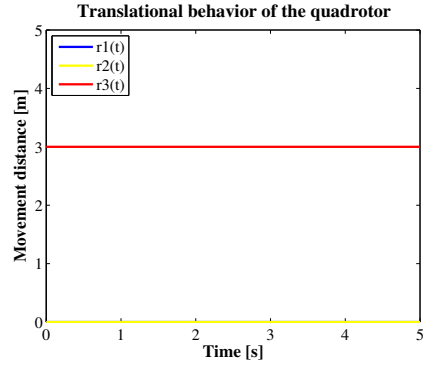


図 5.4 (b) クアッドロータのホバー状態からヨー状態の位置の動きのシミュレーション結果 ( $r_3 = 3$  [m]: 初期状態)

ここで、図 5.3 の  $\theta(t)$  と  $\phi(t)$  のプロット、図 5.4 の  $r_1(t)$  と  $r_2(t)$  のプロットは完全に重なっている。シミュレーション (b) をととして、定理によって求めたモータ制御入力信号で、姿勢の変化はヨーの回転だけ発生し、その他の姿勢 ( $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$ ) や位置 ( $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ ,  $r_3(t)$ ) に偏差は発生せず、一定の高度でヨーの回転の運動 (表 4.1 のマヌーバ (iii-1)) が行えていることが確かめられた。

(c) クアッドロータのホバー状態からピッチ状態 (図 5.5, 図 5.6, 表 4.1 のマヌーバ (iv-1), そして  $\theta$  は固定されている), 条件  $\tilde{\theta} = 0.5236$  [rad],  $\tilde{\phi} = 0$  [rad],  $\tilde{\psi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>], そして  $c = 0$  [m/s<sup>2</sup>] は, 定理 4 から求めた以下のモータ速度によって実現される。

$$\tilde{\omega}_{M1} = \tilde{\omega}_{M2} = \tilde{\omega}_{M3} = \tilde{\omega}_{M4} = 5117.6279 \text{ [rpm]}.$$

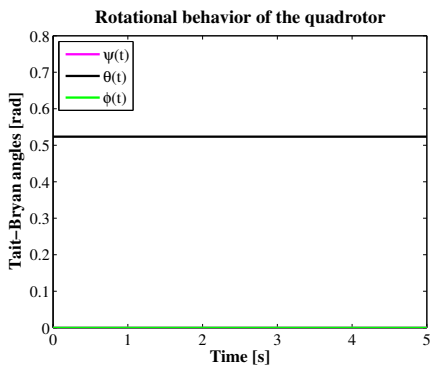


図 5.5 (c) クアッドロータのホバー状態からピッチ状態のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果

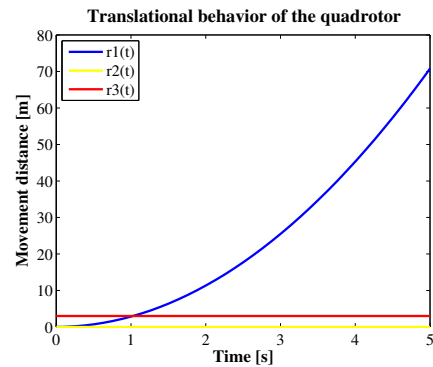


図 5.6 (c) クアッドロータのホバー状態からピッチ状態の位置の動きのシミュレーション結果 ( $r_3 = 3$  [m]: 初期状態)

ここで、図 5.5 の  $\psi(t)$  と  $\phi(t)$  のプロットは完全に重なっている。シミュレーション (c) をとおして、定理によって求めたモータ制御入力信号で、一定のピッチ角  $\theta$  を維持し、その結果  $r_1$  方向に並進運動を行い、その他の姿勢 ( $\psi(t), \phi(t)$ ) や位置 ( $r_2(t), r_3(t)$ ) に偏差は発生せず、一定の高度でピッチ角の並進運動（表 4.1 のマヌーバ (iv-1)、ここに  $\theta$  は固定されている）が行えていることが確かめられた。

(d) クアッドロータのホバー状態からロール状態（図 5.7, 図 5.8, 表 4.1 のマヌーバ (v-1)、そして  $\phi$  は固定されている）、条件  $\tilde{\theta} = 0$  [rad],  $\tilde{\phi} = 0.3491$  [rad],  $\ddot{\psi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>], そして  $c = 0$  [m/s<sup>2</sup>] は、定理 4 から求めた以下のモータ速度によって実現される。

$$\tilde{\omega}_{M1} = \tilde{\omega}_{M2} = \tilde{\omega}_{M3} = \tilde{\omega}_{M4} = 4912.9359 \text{ [rpm]}.$$

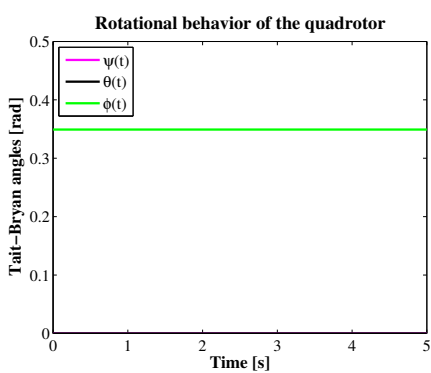


図 5.7 (d) クアッドロータのホバー状態からロール状態のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果

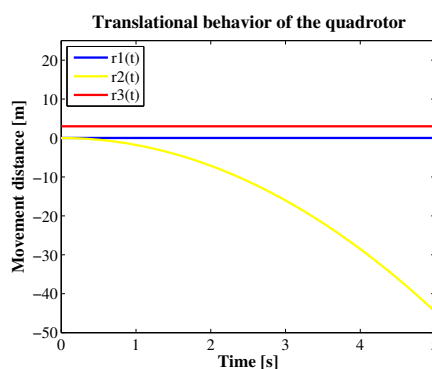


図 5.8 (d) クアッドロータのホバー状態からロール状態の位置の動きのシミュレーション結果 ( $r_3 = 3$  [m] : 初期状態)

ここで、図 5.7 の  $\psi(t)$  と  $\theta(t)$  のプロットは完全に重なっている。シミュレーション (d) をとおして、定理によって求めたモータ制御入力信号で、一定のロール角  $\phi$  を維持し、その結果  $r_2$  方向に並進運動を行い、その他の姿勢 ( $\psi(t), \theta(t)$ ) や位置 ( $r_1(t), r_3(t)$ ) に偏差は発生せず、一定の高度でロール角の並進運動（表 4.1 のマヌーバ (v-1)、ここに  $\phi$  は固定されている）が行えていることが確かめられた。

(e) クアッドロータの垂直飛行の高度を上げる状態（図 5.9, 図 5.10, 表 4.1 のマヌーバ (i-1)）、条件  $\tilde{\theta} = 0$  [rad],  $\tilde{\phi} = 0$  [rad],  $\ddot{\psi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>], そして  $c = 3$  [m/s<sup>2</sup>] は、定理 4 から求めた以下のモータ速度によって実現される。

$$\tilde{\omega}_{M1} = \tilde{\omega}_{M2} = \tilde{\omega}_{M3} = \tilde{\omega}_{M4} = 5442.4121 \text{ [rpm]}.$$

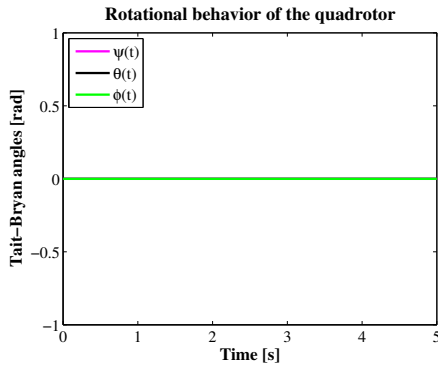


図 5.9 (e) クアッドロータの垂直飛行の高度を上げる状態のテイト=プライアン角のシミュレーション結果

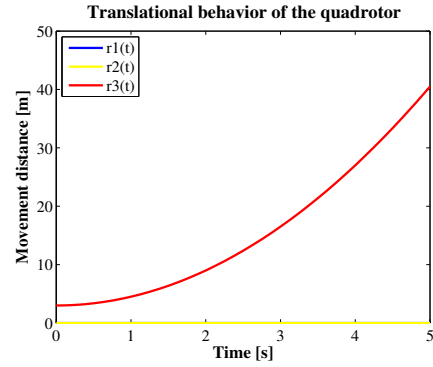


図 5.10 (e) クアッドロータの垂直飛行の高度を上げる状態の位置の動きのシミュレーション結果 ( $r_3 = 3$  [m] : 初期状態)

ここで、図 5.10 の  $\psi(t), \theta(t), \phi(t)$  のプロット、図 5.10 の  $r_1(t)$  と  $r_2(t)$  のプロットは完全に重なっている。シミュレーション (e) をとおして、定理によって求めたモータ制御入力信号で、垂直方向の  $r_3$  方向に並進運動を行い、その他の姿勢 ( $\psi(t), \theta(t), \phi(t)$ ) や位置 ( $r_1(t), r_2(t)$ ) に偏差は発生せず、垂直飛行の高度を上げる運動（並進運動、表 4.1 のマヌーバ (i-1)）が行えていることが確かめられた。

(f) クアッドロータの垂直飛行の高度を下げる状態（図 5.11, 図 5.12, 表 4.1 のマヌーバ (i-2)），条件  $\tilde{\theta} = 0$  [rad],  $\tilde{\phi} = 0$  [rad],  $\tilde{\psi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>], そして  $c = -0.1$  [m/s<sup>2</sup>] は、定理 4 から求めた以下のモータ速度によって実現される。

$$\tilde{\omega}_{M1} = \tilde{\omega}_{M2} = \tilde{\omega}_{M3} = \tilde{\omega}_{M4} = 4738.1449 \text{ [rpm]}.$$

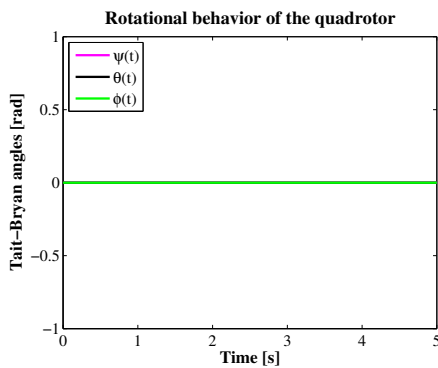


図 5.11 (f) クアッドロータの垂直飛行の高度を下げる状態のテイト=プライアン角のシミュレーション結果

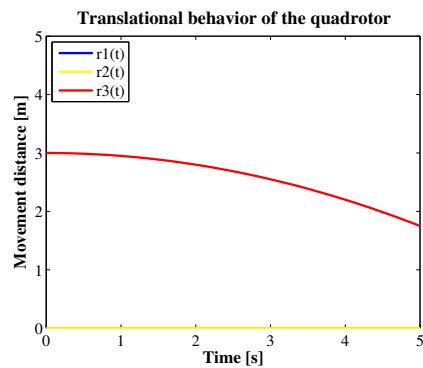


図 5.12 (f) クアッドロータの垂直飛行の高度を下げる状態の位置の動きのシミュレーション結果 ( $r_3 = 3$  [m] : 初期状態)

ここで、図 5.12 の  $\psi(t), \theta(t), \phi(t)$  のプロット、図 5.12 の  $r_1(t)$  と  $r_2(t)$  のプロットは完全に重なっている。シミュレーション (f) をとおして、定理によって求めたモータ制御入力信号で、垂直方向の  $r_3$  方向に並進運動を行い、その他の姿勢 ( $\psi(t), \theta(t), \phi(t)$ ) や位置 ( $r_1(t), r_2(t)$ ) に偏差は発生せず、垂直飛行の

高度を下げる運動（並進運動，表 4.1 のマヌーバ (i-2)）が行えていることが確かめられた。

(g) ヘキサロータのホバー状態からヨー状態（図 5.13，図 5.14，表 4.1 のマヌーバ (iii-1)），条件  $\tilde{\theta} = 0$  [rad]， $\tilde{\phi} = 0$  [rad]， $\tilde{\psi} = 1$  [rad/s<sup>2</sup>]， $c = 0$  [m/s<sup>2</sup>] は，定理 4 から求めた以下のモータ速度によって実現される。

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{M1} &= 3570.2251 \text{ [rpm]}, \\ \tilde{\omega}_{M2} &= \tilde{\omega}_{M3} = 4483.3457 \text{ [rpm]}, \\ \tilde{\omega}_{M4} &= \tilde{\omega}_{M5} = 4052.5853 \text{ [rpm]}, \\ \tilde{\omega}_{M6} &= 4876.2003 \text{ [rpm]}.\end{aligned}$$

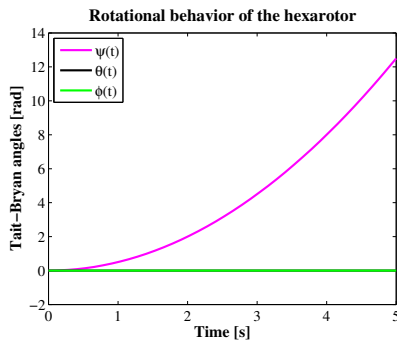


図 5.13 (g) ヘキサロータのホバー状態からヨー状態のテイト＝ブライアン角のシミュレーション結果

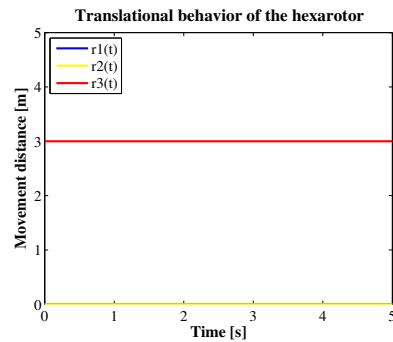


図 5.14 (g) ヘキサロータのホバー状態からヨー状態の位置の動きのシミュレーション結果 ( $r_3 = 3$  [m]：初期状態)

ここで，図 5.13 の  $\theta(t)$ ， $\phi(t)$  のプロット，図 5.14 の  $r_1(t)$ ， $r_2(t)$  のプロットは完全に重なっている。シミュレーション (g) をととして，定理によって求めたモータ制御入力信号で，姿勢の変化はヨーの回転だけ発生し，その他の姿勢 ( $\theta(t)$ ， $\phi(t)$ ) や位置 ( $r_1(t)$ ， $r_2(t)$ ， $r_3(t)$ ) に偏差は発生せず，一定の高度でヨーの回転の運動（表 4.1 のマヌーバ (iii-1)）が行えていることが確かめられた。

(h) ヘキサロータのホバー状態からピッチ状態（図 5.15，図 5.16，表 4.1 のマヌーバ (iv-1)，そして  $\theta$  は固定されている），条件  $\tilde{\theta} = 0.01745$  [rad]， $\tilde{\phi} = 0$  [rad]， $\tilde{\psi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>]， $c = 0$  [m/s<sup>2</sup>] は，定理 4 から求めた以下のモータ速度によって実現される。

$$\tilde{\omega}_{M1} = \tilde{\omega}_{M2} = \tilde{\omega}_{M3} = \tilde{\omega}_{M4} = \tilde{\omega}_{M5} = \tilde{\omega}_{M6} = 4273.7220 \text{ [rpm]}.$$

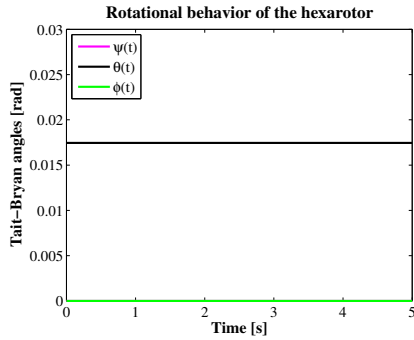


図 5.15 (h) ヘキサロータのホバー状態からピッチ状態のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果

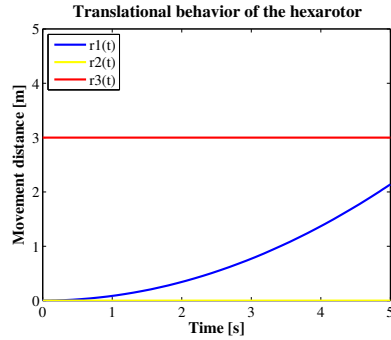


図 5.16 (h) ヘキサロータのホバー状態からピッチ状態の位置の動きのシミュレーション結果 ( $r_3 = 3$  [m] : 初期状態)

ここで、図 5.15 の  $\psi(t)$ ,  $\phi(t)$  のプロットは完全に重なっている。シミュレーション (h) をとおして、定理によって求めたモータ制御入力信号で、一定のピッチ角  $\theta$  を維持し、その結果  $r_1$  方向に並進運動を行い、その他の姿勢 ( $\psi(t)$ ,  $\phi(t)$ ) や位置 ( $r_2(t)$ ,  $r_3(t)$ ) に偏差は発生せず、一定の高度でピッチ角の並進運動 (表 4.1 のマヌーバ (iv-1), ここに  $\theta$  は固定されている) が行えていることが確かめられた。

(i) オクトロータのホバー状態からヨー状態 (図 5.17, 図 5.18, 表 4.1 のマヌーバ (iii-2)), 条件  $\tilde{\theta} = 0$  [rad],  $\tilde{\phi} = 0$  [rad],  $\tilde{\psi} = -1$  [rad/s<sup>2</sup>],  $c = 0$  [m/s<sup>2</sup>] は、定理 4 から求めた以下のモータ速度によって実現される。

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{M1} &= 3489.4736 \text{ [rpm]}, \\ \tilde{\omega}_{M2} &= \tilde{\omega}_{M3} = \tilde{\omega}_{M4} = 5184.9965 \text{ [rpm]}, \\ \tilde{\omega}_{M5} &= \tilde{\omega}_{M6} = 4419.3107 \text{ [rpm]}, \\ \tilde{\omega}_{M7} &= \tilde{\omega}_{M8} = 5470.8561 \text{ [rpm]}.\end{aligned}$$

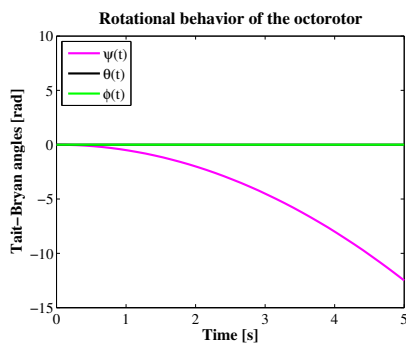


図 5.17 (i) オクトロータのホバー状態からヨー状態のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果

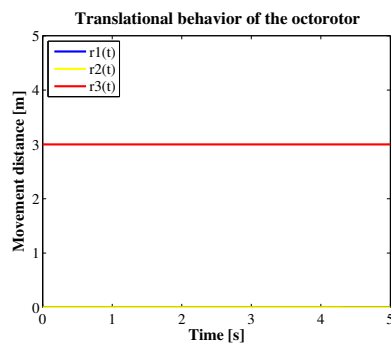


図 5.18 (i) オクトロータのホバー状態からヨー状態の位置の動きのシミュレーション結果 ( $r_3 = 3$  [m] : 初期状態)

ここで、図 5.17 の  $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$  のプロット、図 5.18 の  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$  のプロットは完全に重なっている。シミュレーション (i) をとおして、定理によって求めたモータ制御入力信号で、姿勢の変化はヨーの回転



だけ発生し、その他の姿勢 ( $\theta(t), \phi(t)$ ) や位置 ( $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ ) に偏差は発生せず、一定の高度でヨーの回転の運動 (表 4.1 のマヌーバ (iii-2)) が行えていることが確かめられた。

(j) オクトロータのホバー状態からピッチ状態 (図 5.19, 図 5.20, 表 4.1 のマヌーバ (iv-2), そして  $\theta$  は固定されている), 条件  $\tilde{\theta} = 0.01745$  [rad],  $\tilde{\phi} = 0$  [rad],  $\tilde{\psi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>],  $c = 0$  [m/s<sup>2</sup>] は, 定理 4 から求めた以下のモータ速度によって実現される。

$$\tilde{\omega}_{M1} = \tilde{\omega}_{M2} = \tilde{\omega}_{M3} = \tilde{\omega}_{M4} = \tilde{\omega}_{M5} = \tilde{\omega}_{M6} = \tilde{\omega}_{M7} = \tilde{\omega}_{M8} = 4896.1635 \text{ [rpm]}.$$

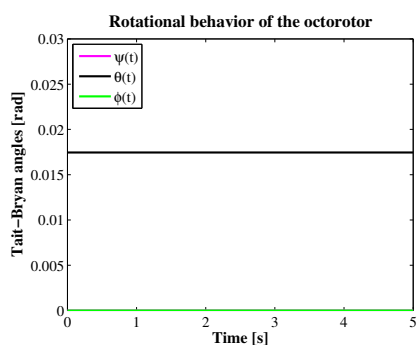


図 5.19 (j) オクトロータのホバー状態からピッチ状態のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果

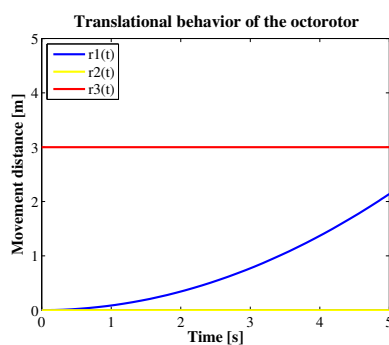


図 5.20 (j) オクトロータのホバー状態からピッチ状態の位置の動きのシミュレーション結果 ( $r_3 = 3$  [m] : 初期状態)

ここで, 図 5.19 の  $\psi(t), \phi(t)$  のプロットは完全に重なっている. シミュレーション (j) をとおして, 定理によって求めたモータ制御入力信号で, 一定のピッチ角  $\theta$  を維持し, その結果  $r_1$  方向に並進運動を行い, その他の姿勢 ( $\psi(t), \phi(t)$ ) や位置 ( $r_2(t), r_3(t)$ ) に偏差は発生せず, 一定の高度でピッチ角の並進運動 (表 4.1 のマヌーバ (iv-2), ここに  $\theta$  は固定されている) が行えていることが確かめられた。

## 5.2 完全なモータ故障が存在する，マルチロータの墜落を回避し，飛行を維持するシミュレーション

本節では，完全なモータ故障の存在下，墜落を回避する表 4.2 の 2 タイプの飛行状態の飛行の典型例を数値シミュレーションによって示す．以降の結果は，定理 5，定理 6，と完全なモータ故障存在下の動力学の状態方程式 [式 (4.31)], [式 (4.32)] の実装を Maple のシンボリック計算，MATLAB の行列計算，そして ode45 ソルバー [38] を含む MATLAB の数値計算を用いて行い，得ている．ここで注意すべきは，式 (4.32) の数値計算にはオイラー角  $(\psi(t), \theta(t), \phi(t))$  が必要であるため，式 (4.31) の計算結果のタイムステップと式 (4.32) を解く際のタイムステップのずれを補間する補間関数 [39] を用いてオイラー角  $\psi(t), \theta(t)$ ，そして  $\phi(t)$  の解を得ている．

(A) ヘキサロータのモータ番号 3 が故障し停止したときの次の条件下 (図 6.1) :  $t[s] \in [0, 5]$ ,  $\theta = \phi = 0$  [rad],  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>],  $k_{F1} = k_{F2} = k_{F4} = k_{F5} = k_{F6} = 1.79 \times 10^{(-7)}$  [N/rpm<sup>2</sup>],  $k_{M1} = k_{M2} = k_{M4} = k_{M5} = k_{M6} = 4.38 \times 10^{(-9)}$  [Nm/rpm<sup>2</sup>],  $c$  (or  $\ddot{r}_3$ ) = 0 [m/s<sup>2</sup>] の図 5.22 と図 5.23 に示すホバリングの飛行状態 (表 4.2 のタイプ (I) の状態と表 4.1 のマヌーバ (ii)) を達成するモータ速度制御信号は定理 5 により次のように求まる．

$$\begin{aligned}\omega_{M1} = \omega_{M2} = \omega_{M4} = \omega_{M5} &= 5233.820507 \text{ [rpm]}, \\ \omega_{M6} &= 0 \text{ [rpm]}.\end{aligned}$$

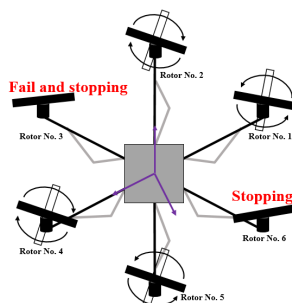


図 5.21 例 (A) 番号 3 のモータが完全に故障し停止したときのヘキサロータの飛行

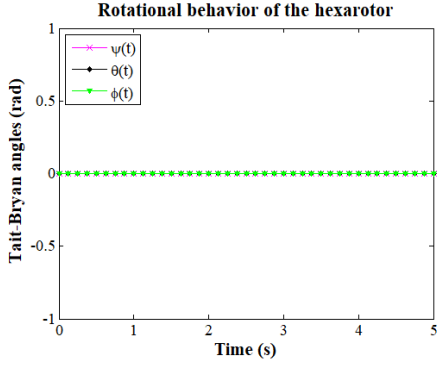


図 5.22 3 番目のモータが故障し停止したときの、墜落を避ける飛行のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果 (例 (A))

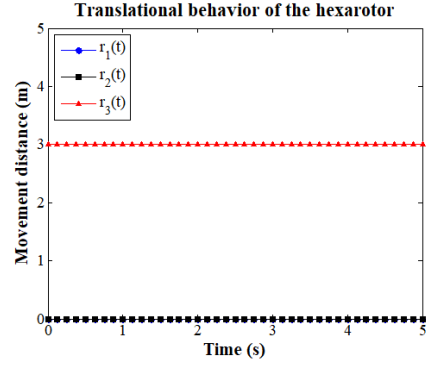


図 5.23 3 番目のモータが故障し停止したときの、墜落を避ける飛行の動きの位置のシミュレーション結果 (例 (A),  $r_3 = 3$  [m]: 初期状態)

ここに、図 5.22 の  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$ , そして  $\phi(t)$  は完全に重なっている。図 5.23 の  $r_1(t)$  と  $r_2(t)$  もまた、完全に重なっている。シミュレーション (A) をとおして、ヘキサロータのモータ 3 が故障し停止したとき、定理によって求めた残存モータ制御入力信号で、モータ 3 と対角線上にあるモータ 6 を停止し、姿勢 ( $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$ ) や位置 ( $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ ,  $r_3(t)$ ) に偏差は発生せず、ホバリングの状態 (表 4.2 のタイプ (I) の状態と表 4.1 のマヌーバ (ii)) が維持できることが確かめられた。

このとき、定理 5 の関数  $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n})$  は以下のように与えられる。

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}_5^3) = A_5^3(\mathbf{x})\mathbf{u}_5^3 - \mathbf{b}_5, \quad (5.3)$$

$$A_5^3(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{5 \times 5} = \begin{pmatrix} A'_{4 \times 5}(\boldsymbol{\eta}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{Q2}^T Q_{2 \times 5}^3 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$A'_{4 \times 5}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{4 \times 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}_{\text{rot}5}^3 \\ \mathbf{e}_{\frac{1}{m}}^T \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{S}_{\text{tra}5}^3 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{b}_5 = (\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}, c + g, \mathbf{b}'_1)^T \in \mathbb{R}^5, \quad (5.6)$$

ここに  $i_1 = 3$  そして  $n = 1$ .  $\text{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{Q1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{Q2}\}$  は 2 次元の実ベクトル空間  $\mathbb{R}^2$  の基底ベクトルを表す。行列  $Q_{2 \times 5}^3 \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$  は任意の定数行列  $Q_{2 \times 6}$  から 3 列目が削除された行列を表す。 $\mathbf{b}'_1 \in \mathbb{R}$  は定数を表す。行列  $S_{\xi 5}^3$  は行列  $S_{\xi 6}$  の 3 列目が削除された行列を表す、( $\xi = \text{rot}, \text{tra}$ )。

(B) オクトロータのモータ番号 2, 5, 8 が故障し停止したときの次の条件下 (図 5.24) :  $t[s] \in [0, 5]$ ,  $\theta = 0.0872665$  [rad],  $\phi = 0$  [rad],  $\ddot{\theta} = \ddot{\phi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>],  $k_{F1} = k_{F3} = k_{F4} = k_{F6} = k_{F7} = 1.79 \times 10^{(-7)}$  [N/rpm<sup>2</sup>],  $k_{M1} = k_{M3} = k_{M4} = k_{M6} = k_{M7} = 4.38 \times 10^{(-9)}$  [N/rpm<sup>2</sup>],  $c$  (or  $\ddot{r}_3$ ) = 0 [m/s<sup>2</sup>] の図 5.25 と図 5.26 に示す一定の高度でピッチ角の並進運動をする飛行状態 (表 4.2 のタイプ (I) の状態, 表 4.1 のマヌーバ (iv-1), そして  $\theta$  は固定されている) を達成するモータ速度制御信号は定理 5 によって次

のように求まる.

$$\begin{aligned}\omega_{M1} &= \omega_{M6} = 8249.4166 \text{ [rpm]}, \\ \omega_{M3} &= \omega_{M4} = 5309.2771 \text{ [rpm]}, \\ \omega_{M7} &= 0 \text{ [rpm]}.\end{aligned}$$

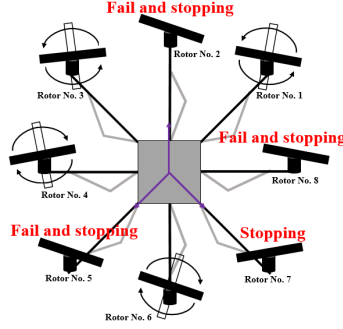


図 5.24 例 (B) 番号 2, 5, 8 のモータが完全に故障し停止したときのオクトロータの飛行

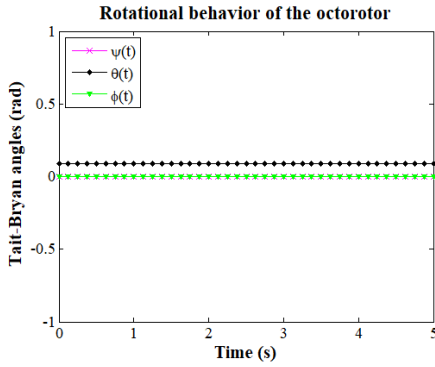


図 5.25 2, 5, 8 番目のモータが故障し停止したときの, 墜落を避ける飛行のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果 (例 (B))

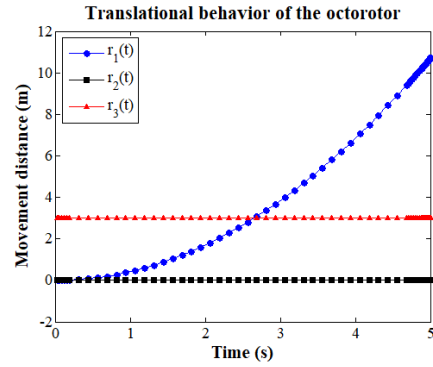


図 5.26 2, 5, 8 番目のモータが故障し停止したときの, 墜落を避ける飛行の動きの位置のシミュレーション結果 (例 (B),  $r_3 = 3$  [m]: 初期状態)

ここに, 図 5.25 の  $\psi(t)$  と  $\phi(t)$  は完全に重なっている. シミュレーション (B) をとおして, オクトロータのモータ 2, 5, 8 が故障し停止したとき, 定理によって求めた残存モータ制御入力信号で, モータ 3 と対角線上にあるモータ 7 を停止し, 一定のピッチ角  $\theta$  を維持し, その結果  $r_1$  方向に並進運動を行い, その他の姿勢 ( $\psi(t), \phi(t)$ ) や位置 ( $r_2(t), r_3(t)$ ) に偏差は発生せず, 一定の高度でピッチ角の並進運動 (表 4.2 のタイプ (I) の状態, 表 4.1 のマヌーバ (iv-1), そして  $\theta$  は固定されている) が行えていることが確かめられた.

この場合, 定理 5 の関数  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n})$  は以下のように与えられる.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_5^{2,5,8}) = \mathbf{A}_5^{2,5,8}(\mathbf{x})\mathbf{u}_5^{2,5,8} - \mathbf{b}_5, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{A}_5^{2,5,8}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{5 \times 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{4 \times 5}^{2,5,8}(\boldsymbol{\eta}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{Q2}^T \mathbf{Q}_{4 \times 5}^{2,5,8} \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$A_{4 \times 5}^{2,5,8}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{4 \times 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}5}^{2,5,8} \\ \mathbf{e}_3^T \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}5}^{2,5,8} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{b}_5 = (\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}, c + g, \mathbf{b}'_1)^T \in \mathbb{R}^5, \quad (5.10)$$

ここに  $i_1 = 2, i_2 = 5, i_3 = 8$ , そして  $n = 3$ .  $\text{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{Q1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{Q2}, \boldsymbol{\varepsilon}_{Q3}, \boldsymbol{\varepsilon}_{Q4}\}$  は 4 次元の右手系実ベクトル空間  $\mathbb{R}^4$  の基底ベクトルを表す. 行列  $\mathbf{Q}_{4 \times 5}^{2,5,8} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$  は任意の定数行列  $\mathbf{Q}_{4 \times 8}$  の 2, 5, 8 列目が削除された行列を表す.  $\mathbf{b}'_1 \in \mathbb{R}$  は定数を表す. 行列  $\mathbf{S}_{\xi 5}^{2,5,8}$  は行列  $\mathbf{S}_{\xi 8}$  の 2, 5, 8 列目が削除された行列を表す ( $\xi = \text{rot}, \text{tra}$ ).

(C) クアッドロータのモータ番号 2 が故障し停止したときの条件  $t[s] \in [0, 5], \theta = \phi = 0 [\text{rad}], \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0 [\text{rad/s}^2], k_{F1} = k_{F3} = k_{F4} = 1.79 \times 10^{(-7)} [\text{N/rpm}^2], k_{M1} = k_{M3} = k_{M4} = 4.38 \times 10^{(-9)} [\text{Nm/rpm}^2], c \text{ (or } \ddot{r}_3) = 0 [\text{m/s}^2]$  のときに, 図 5.28 と図 5.29 の墜落を避ける飛行状態 (図 5.27, 表 4.2 のタイプ (II) の状態, 表 4.1 のマヌーバ (i-1), (i-2),  $r_3$  は固定されている, そして  $\ddot{\psi} = -12.3371 [\text{rad/s}^2]$  は結果である) を達成するモータ速度制御信号は定理 6 によって次のように得られる.

$$\omega_{M1} = \omega_{M3} = 6735.1766 [\text{rpm}], \omega_{M4} = 0 [\text{rpm}].$$

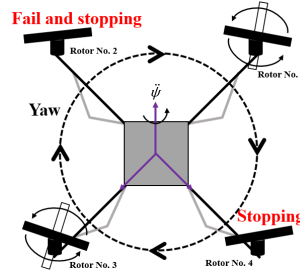


図 5.27 例 (C) 番号 2 のモータが完全に故障し停止したときの墜落を避けるクアッドロータの飛行

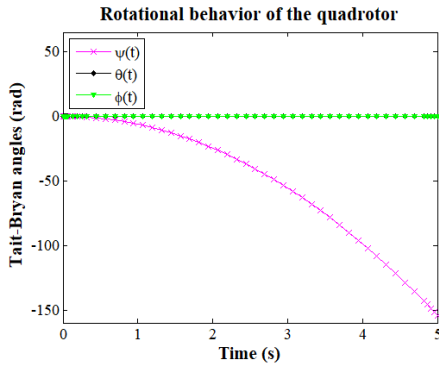


図 5.28 2 番目のモータが故障し停止したときの, 墜落を避ける飛行のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果 (例 (C))

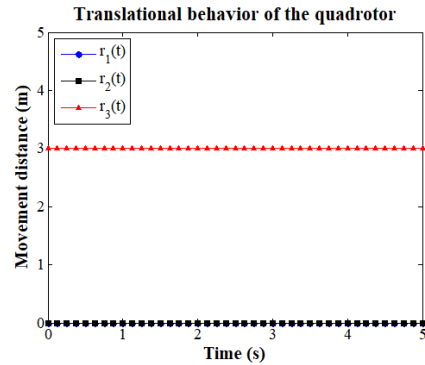


図 5.29 2 番目のモータが故障し停止したときの, 墜落を避ける飛行の動きの位置のシミュレーション結果 (例 (C),  $r_3 = 3 [\text{m}]$ : 初期状態)

ここに、図 5.28 の変数  $\theta(t)$  と  $\phi(t)$  は完全に重なっている。図 5.29 の変数  $r_1(t)$  と  $r_2(t)$  もまた、完全に重なっている。シミュレーション (C) をとおして、クアッドロータのモータ 2 が故障し停止したとき、定理によって求めた残存モータ制御入力信号で、モータ 2 と対角線上にあるモータ 4 を停止し、ヨーを自由に回転させることで (図 5.27, 表 4.2 のタイプ (II) の状態, 表 4.1 のマヌーバ (i-1), (i-2),  $r_3$  は固定されている, そして  $\dot{\psi} = -12.3371$  [rad/s<sup>2</sup>] は結果である), その他の姿勢 ( $\theta(t), \phi(t)$ ) や位置 ( $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ ) に偏差は発生せず, 飛行し続け, 墜落を回避できることが確かめられた。

この時, 定理 6 の関数  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n})$  は以下のように与えられる。

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_3^2) = \mathbf{A}_3^2(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}_3^2 - \mathbf{b}_3, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{A}_3^2(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}3}^2 \\ \mathbf{e}_3^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}3}^2 \\ \mathbf{e}_3^T \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}3}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{b}_3 = (\ddot{\theta}, \ddot{\phi}, c + g)^T \in \mathbb{R}^3. \quad (5.13)$$

ここに  $i_1 = 2$  として  $n = 1$ . 行列  $\mathbf{S}_{\xi 3}^2$  は行列  $\mathbf{S}_{\xi 4}$  の 2 列目が削除された行列を表す ( $\xi = \text{rot}, \text{tra}$ ).

(D) クアッドロータのモータ番号 1 と 3 が故障し停止したときの条件  $t[\text{s}] \in [0 \ 0.1], \theta = \phi = 0$  [rad],  $\ddot{\theta} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>],  $\ddot{\phi} = 17.4533$  [rad/s<sup>2</sup>],  $k_{F2} = k_{F4} = 1.79 \times 10^{(-7)}$  [N/rpm<sup>2</sup>],  $k_{M2} = k_{M4} = 4.38 \times 10^{(-9)}$  [Nm/rpm<sup>2</sup>],  $c$  (or  $\dot{r}_3$ ) = 0 [m/s<sup>2</sup>] のときに, 図 5.31 と図 5.32 の墜落を避ける飛行状態 (図 5.30), 表 4.2 のタイプ (II) の状態, 表 4.1 のマヌーバ (v-1), そして  $\dot{\psi} = 12.3371$  [rad/s<sup>2</sup>] は結果である) を達成するモータ速度制御信号は定理 6 によって次のように得られる。

$$\omega_{M2} = 6535.6936 \text{ [rpm]}, \quad \omega_{M4} = 6928.9189 \text{ [rpm]}.$$

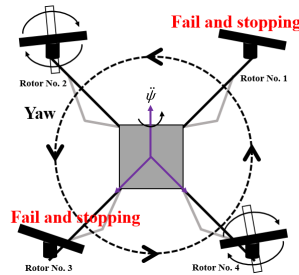


図 5.30 例 (D) 番号 1 と 3 のモータが完全に故障し停止したときの墜落を避けるクアッドロータの飛行

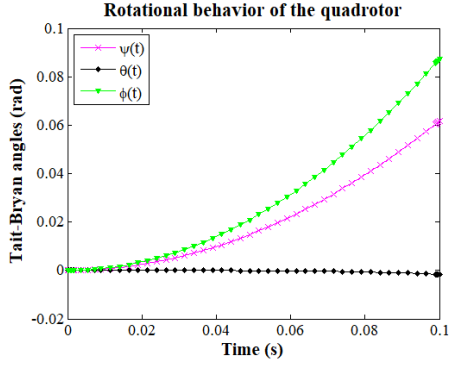


図 5.31 1, 3 番目のモータが故障し停止したときの、墜落を避ける飛行のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果 (例 (D))

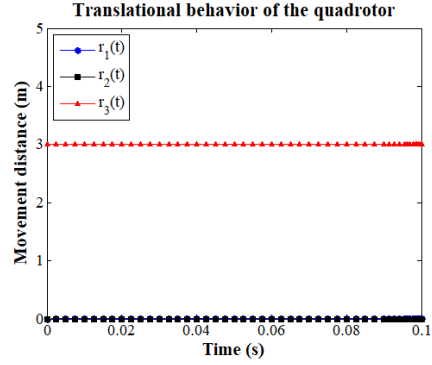


図 5.32 1, 3 番目のモータが故障し停止したときの、墜落を避ける飛行の動きの位置のシミュレーション結果 (例 (D),  $r_3 = 3$  [m]: 初期状態)

ここに、図 5.32 の  $r_1(t)$  と  $r_2(t)$  は完全に重なっている。また、並進の加速度が観測できない理由は、シミュレーション時間がとても短いからである ( $t[s] \in [0, 0.1]$ )。シミュレーション (D) をとおして、クアドロータのモータ 1, 3 が故障し停止したとき、定理によって求めた残存モータ制御入力信号で、ヨーを自由に回転させ、高度を維持しながら、ロールの回転を行うこと (表 4.2 のタイプ (II) の状態、表 4.1 のマヌーバ (v-1)、そして  $\ddot{\psi} = 12.3371$  [rad/s<sup>2</sup>] は結果である) ができることが確かめられた。これは、ヨーの制御ができない場合でも、位置の制御はある程度可能であることを意味する。

この場合、定理 6 の関数  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2p-n}^{i_1, i_2, \dots, i_n})$  は以下のように与えられる。

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_2^{1,3}) = \mathbf{A}_2^{1,3}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}_2^{1,3} - \mathbf{b}_2, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{A}_2^{1,3}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_3^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2}^{1,3} \\ \boldsymbol{e}_3^T \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}2}^{1,3} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{b}_2 = (\dot{\phi}, c + g)^T \in \mathbb{R}^2. \quad (5.16)$$

ここに  $i_1 = 1, i_2 = 3$ , そして  $n = 2$ . 行列  $\mathbf{S}_{\xi 2}^{1,3}$  は行列  $\mathbf{S}_{\xi 4}$  の 1, 3 列目が削除された行列を表す ( $\xi = \text{rot}, \text{tra}$ ).

(E) オクトロータのモータ番号 1, 3, 4, 6, と 8 が故障し停止したときの条件  $t[s] \in [0, 5]$ ,  $\theta = \phi = 0$  [rad],  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>],  $k_{F2} = k_{F5} = k_{F7} = 1.79 \times 10^{(-7)}$  [N/rpm<sup>2</sup>],  $k_{M2} = k_{M5} = k_{M7} = 4.38 \times 10^{(-9)}$  [Nm/rpm<sup>2</sup>],  $c$  (or  $\dot{r}_3$ ) = -0.1 [m/s<sup>2</sup>] のときに, 図 5.34 と図 5.35 の墜落を避ける飛行状態 (図 Fig. 5.33, 表 4.2 のタイプ (II) の状態, 表 4.1 のマヌーバ (i-2), そして  $\ddot{\psi} = -2.2140$  [rad/s<sup>2</sup>] は結果である) を達成するモータ速度制御信号は定理 6 によって以下のように得られる.

$$\omega_{M2} = 8866.5435 \text{ [rpm]}, \omega_{M5} = \omega_{M7} = 7455.8446 \text{ [rpm]}.$$

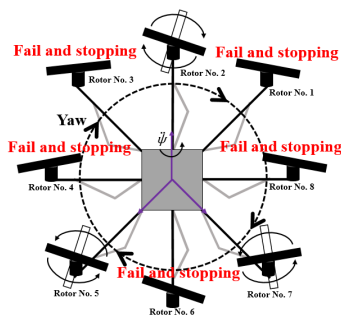


図 5.33 例 (E) 番号 1, 3, 4, 6, そして 8 のモータが完全に故障し停止したときの墜落を避けるオクトロータの飛行

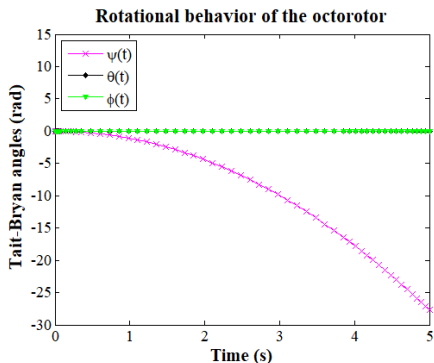


図 5.34 1, 3, 4, 6, 8 番目のモータが故障し停止したときの, 墜落を避ける飛行のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果 (例 (E))

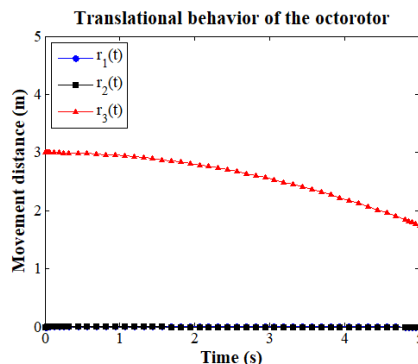


図 5.35 1, 3, 4, 6, 8 番目のモータが故障し停止したときの, 墜落を避ける飛行の動きの位置のシミュレーション結果 (例 (E),  $r_3 = 3$  [m]: 初期状態)

ここに, 図 5.34 の状態変数  $\theta(t)$  と  $\phi(t)$  は完全に重なっている. 図 5.35 の状態変数  $r_1(t)$  と  $r_2(t)$  はまた, 完全に重なっている. シミュレーション (E) をとおして, オクトロータのモータ 1, 3, 4, 6, 8 が故障し停止したとき, 定理によって求めた残存モータ制御入力信号で, ヨーを自由に回転させながら, 垂直飛行の高度を下げる運動 (表 4.2 のタイプ (II) の状態, 表 4.1 のマヌーバ (i-2), そして  $\ddot{\psi} = -2.2140$  [rad/s<sup>2</sup>] は結果である) を行い, その他の姿勢 ( $\theta(t), \phi(t)$ ) や位置 ( $r_1(t), r_2(t)$ ) に偏差は発生せず, 墜落を回避できることが確かめられた.



この場合、定理 6 の関数  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{2^{p-n}}^{i_1, i_2, \dots, i_n})$  は具体的に以下のように与えられる。

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_3^{1,3,4,6,8}) = \mathbf{A}_3^{1,3,4,6,8}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}_3^{1,3,4,6,8} - \mathbf{b}_3, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{A}_3^{1,3,4,6,8}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{(3) \times (3)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}3}^{1,3,4,6,8} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3^T \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}3}^{1,3,4,6,8} \\ \boldsymbol{e}_{\frac{1}{m}}^T \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}3}^{1,3,4,6,8} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{b}_3 = (\ddot{\theta}, \ddot{\phi}, c + g)^T \in \mathbb{R}^3. \quad (5.19)$$

ここに  $i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 4, i_4 = 6, i_5 = 8$ , そして  $n = 5$ . 行列  $\mathbf{S}_{\xi 3}^{1,3,4,6,8}$  はモータの力に関する係数行列  $\mathbf{S}_{\xi 8}$  の 1, 3, 4, 6, 8 列目が削除された行列を表す ( $\xi = \text{rot}, \text{tra}$ ).

## 第 6 章

# 完全なモータ故障の存在下，すべての飛行操作が可能な場合のヘキサロータの飛行状態を安定させる状態変数フィードバックを持つ線形または非線形の動力学の状態方程式

本章では，墜落を回避する表 4.2 のタイプ (I) の状態を仮定して，ヘキサロータを例に，モータ故障時の飛行状態を安定させる状態変数フィードバックを持つ線形または非線形の動力学の状態方程式について議論する．特に，モータ故障時のヘキサロータの墜落を回避する飛行状態の安定性の定理を提供し，状態変数フィードバックを持つ非線形の動力学の状態方程式によってそのような飛行状態を安定化できることを定理としてまとめる．そして，数値シミュレーションを行い定理の有効性を確認する．

墜落を回避する表 4.2 のタイプ (I) の状態のとき ( $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq 6, 1 \leq n \leq 2, n \in \mathbb{N}$ )，ヘキサロータ ( $p = 3$ ) の状態方程式 [式 (4.31)] をテイラー展開し，高次項を無視して，以下の，墜落を回避する表 4.2 のタイプ (I) の飛行状態を安定させるために利用できる動作点  $(\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T$  と  $(\mathbf{r}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{r}}_{\text{op}})^T$  における定数行列を持つヘキサロータの変分微分方程式を得る．

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{X}_{\text{rot}} = \mathbf{F}_{\text{rot}6-n(\text{op})} \delta \mathbf{X}_{\text{rot}} + \mathbf{G}_{\text{rot}6-n(\text{op})} \delta \mathbf{U}_{6-n}^{i_1, \dots, i_n}, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{X}_{\text{rot}} &= (\delta \mathbf{x}, \delta \dot{\mathbf{x}})^T, \\ (\delta \mathbf{x}, \delta \dot{\mathbf{x}})^T &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(op)}, \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{(op)})^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{\text{rot}6-n(\text{op})} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ f_{\text{rot}x}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}}, \mathbf{u}_{6-n(\text{op})}^{i_1, \dots, i_n}) & f_{\text{rot}\dot{x}}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}}) \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{G}_{\text{rot}6-n(\text{op})} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times (6-n)} \\ f_{\text{rot}u_{6-n}^{i_1, \dots, i_n}}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}) \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

$$f_{\text{rot}\zeta}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}, \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{op}}, \mathbf{u}_{6-n(\text{op})}^{i_1, \dots, i_n}) = \mathbf{Y}_{\zeta}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}, \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{op}}) + \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}6-n}^{i_1, \dots, i_n} \mathbf{u}_{6-n(\text{op})}^{i_1, \dots, i_n}) \right] \Big|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}}, \quad (6.4)$$

$$f_{\text{rot}\dot{\zeta}}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}, \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{op}}) = \mathbf{Y}_{\dot{\zeta}}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}, \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{op}}), \quad (6.5)$$

$$f_{\text{rot}u_{6-n}^{i_1, \dots, i_n}}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}) = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{rot}6-n}^{i_1, \dots, i_n}, \quad (6.6)$$

ここに  $\zeta = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , または  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\dot{\zeta} = \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ , または  $\dot{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^2$ , そして  $\mathbf{0}_{3 \times (6-n)}$  は  $3 \times (6-n)$  ゼロ行列である。  $\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}$  と  $\mathbf{Y}_{\dot{\mathbf{x}}}$  はそれぞれ、  $\mathbf{Y}$  の  $\mathbf{x}$  による偏微分と  $\mathbf{Y}$  の  $\dot{\mathbf{x}}$  による偏微分を表す。  $f_{\text{rot}\mathbf{x}}$ ,  $f_{\text{rot}\dot{\mathbf{x}}}$ , そして  $f_{\text{rot}u_{6-n}^{i_1, \dots, i_n}}$  はそれぞれ、  $f_{\text{rot}}$  の  $\mathbf{x}$  による偏微分,  $f_{\text{rot}}$  の  $\dot{\mathbf{x}}$  による偏微分, そして  $f_{\text{rot}}$  の  $\mathbf{u}_{6-n}^{i_1, \dots, i_n}$  による偏微分を表す。

定理 7 ヘキサロータの墜落を回避する表 4.2 のタイプ (I) の状態のとき ( $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq 6$ ,  $1 \leq n \leq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ),  $\mathbf{C}_{M\text{rot}6-n(\text{op})} \in \mathbb{R}^{6 \times (6 \times (6-n))}$  は  $6 \times (6 \times (6-n))$  可制御性行列を表し、式 (6.7) で定義されるものとする。

$$\mathbf{C}_{M\text{rot}6-n(\text{op})} = [\mathbf{G}_{\text{rot}6-n(\text{op})}, \mathbf{F}_{\text{rot}6-n(\text{op})} \mathbf{G}_{\text{rot}6-n(\text{op})}, \mathbf{F}_{\text{rot}6-n(\text{op})}^2 \mathbf{G}_{\text{rot}6-n(\text{op})}, \dots, \mathbf{F}_{\text{rot}6-n(\text{op})}^5 \mathbf{G}_{\text{rot}6-n(\text{op})}], \quad (6.7)$$

もし  $\mathbf{C}_{M\text{rot}6-n(\text{op})}$  がフルランク 6 であるならば、定数行列の対  $(\mathbf{F}_{\text{rot}6-n(\text{op})}, \mathbf{G}_{\text{rot}6-n(\text{op})})$  は完全可制御であるといい、式 (6.8) の解がすべて原点ベクトル  $\mathbf{0}_6 = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^6$  に近づいていくような  $(6-n) \times 6$  次元の定数行列  $\mathbf{K}_{6-n(\text{op})}$  が存在する (すなわち、その原点は漸近安定である)。加えて、このとき式 (6.9) の変分加速度  $\delta \ddot{\mathbf{r}}$  もまた原点ベクトル  $\mathbf{0}_3 = (0, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$  に近づいていく。

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{X}_{\text{rot}} = (\mathbf{F}_{\text{rot}6-n(\text{op})} - \mathbf{G}_{\text{rot}6-n(\text{op})} \mathbf{K}_{6-n(\text{op})}) \delta \mathbf{X}_{\text{rot}}, \quad (6.8)$$

$$\delta \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}6-n}^{i_1, \dots, i_n} \mathbf{u}_{6-n(\text{op})}^{i_1, \dots, i_n}) \right] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{op}}} \delta \mathbf{x} - \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{\text{op}}) \mathbf{S}_{\text{tra}6-n}^{i_1, \dots, i_n} \mathbf{K}_{6-n(\text{op})} \delta \mathbf{X}_{\text{rot}}, \quad (6.9)$$

ここに  $\delta \mathbf{X}_{\text{rot}} = (\delta \mathbf{x}, \delta \dot{\mathbf{x}})^T$ , そして  $\delta \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_{\text{op}}$  である。

証明 7 ヘキサロータの墜落を回避する表 4.2 のタイプ (I) の状態のとき ( $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq 6$ ,  $1 \leq n \leq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ), 式 (6.1) に式  $\delta \mathbf{U}_{6-n}^{i_1, \dots, i_n} = -\mathbf{K}_{6-n(\text{op})} \delta \mathbf{X}_{\text{rot}}$  を代入して、式 (6.8) のヘキサロータの閉ループシステムを定義する。

[43]において、定数行列の対  $(\mathbf{F}_{\text{rot6-n(op)}}, \mathbf{G}_{\text{rot6-n(op)}})$  が完全可制御のとき、 $\mathbf{F}_{\text{rot6-n(op)}} - \mathbf{G}_{\text{rot6-n(op)}} \mathbf{K}_{6-n(\text{op})}$  の固有値の実部が負になるような定数行列  $\mathbf{K}_{6-n(\text{op})}$  が存在することが証明されている。したがって、定数行列の対  $(\mathbf{F}_{\text{rot6-n(op)}}, \mathbf{G}_{\text{rot6-n(op)}})$  が完全可制御のとき、式 (6.8) のすべての解は原点ベクトル  $\mathbf{0}_6$  に近づいていく。

さらに、このとき式 (6.9) において、 $\delta \mathbf{X}_{\text{rot}} \rightarrow \mathbf{0}_6$ 、(そして  $\delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}_3$ ) となるので、結果、 $\delta \dot{\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{0}_3$  となる。したがって、定理 7 は証明された。  $\square$

**定理 8** ヘキサロータの墜落を回避する表 4.2 のタイプ (I) の状態のとき ( $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq 6$ ,  $1 \leq n \leq 2, n \in \mathbb{N}$ )、(i) もし、式 (6.7)  $\mathbf{C}_{M_{\text{rot6-n(op)}}}$  がフルランク 6 であれば、モータ制御入力信号  $\delta \mathbf{u}_{6-n}^{i_1, \dots, i_n} = \mathbf{M} \delta \mathbf{U}_{6-n}^{i_1, \dots, i_n} = -\mathbf{K}_{6-n(\text{op})} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(\text{op})}, \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{(\text{op})})^T$  を非線形の動力学の状態方程式 [式 (4.31)] と [式 4.32] に加えることで、以下の閉ループ方程式 [式 (6.10)] と [式 (6.12)] が得られる。

(ii) さらに、もし、ヤコビ行列  $(\mathbf{F}_{\text{rot6-n(op)}} - \mathbf{G}_{\text{rot6-n(op)}} \mathbf{K}_{6-n(\text{op})})$  のすべての固有値の実部が負であれば、動作点  $(\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T$  付近に初期値  $(t_0, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T)$  を持つ式 (6.10) の解  $(\boldsymbol{\varphi}(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T), \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T))$  は  $(\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T$  に近づいていく。そして、式 (6.12) の加速度  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$  もまた、動作点ベクトル  $\ddot{\mathbf{r}}_{(\text{op})}$  に近づいていく。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ f_{\text{rot}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

$$f_{\text{rot}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{Y}(\mathbf{T}_L \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\mathbf{T}_L \mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{rot6-n}}^{i_1, \dots, i_n} (\mathbf{u}_{6-n(\text{op})}^{i_1, \dots, i_n} + \delta \mathbf{u}_{6-n}^{i_1, \dots, i_n}), \quad (6.11)$$

$$\mathbf{T}_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ f_{\text{tra}}(\boldsymbol{\varphi}(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T), \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T)) \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

$$f_{\text{tra}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -g \mathbf{e}_3 + \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra6-n}}^{i_1, \dots, i_n} (\mathbf{u}_{6-n(\text{op})}^{i_1, \dots, i_n} + \delta \mathbf{u}_{6-n}^{i_1, \dots, i_n}), \quad (6.13)$$

ここに  $\mathbf{K}_{6-n(\text{op})}$  は定理 7 で定義される定数行列、 $(\delta \mathbf{x}, \delta \dot{\mathbf{x}})^T = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(\text{op})}, \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{(\text{op})})^T$ 、 $(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))^T = (\boldsymbol{\varphi}(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T), \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T))^T = (\boldsymbol{\varphi}(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T, \mathbf{u}_{6-n(\text{op})}^{i_1, \dots, i_n} + \delta \mathbf{u}_{6-n}^{i_1, \dots, i_n}), \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T, \mathbf{u}_{6-n(\text{op})}^{i_1, \dots, i_n} + \delta \mathbf{u}_{6-n}^{i_1, \dots, i_n}))^T \in \Sigma_{\text{rot}} \subset \mathbb{R}^6$ 、初期値  $(t_0, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T) \in \mathbb{R} \times U$ 、そして  $\mathbf{u}_{6-n(\text{op})}^{i_1, \dots, i_n} + \delta \mathbf{u}_{6-n}^{i_1, \dots, i_n} \in \Lambda$ 、そして  $U$  は  $\|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_0 - \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T\| < 1$  を満足するような動作点  $(\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T \in \Sigma_{\text{rot}} \subset \mathbb{R}^6$  の近傍を意味する。

**証明 8** ヘキサロータの墜落を回避する表 4.2 のタイプ (I) の状態のとき ( $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq 6$ ,  $1 \leq n \leq 2, n \in \mathbb{N}$ )、付録 C のハートマン=グロブマンの定理を利用する。そして、 $\mathbf{K}_{6-n(\text{op})} \in \mathbb{R}^{(6-n) \times 6}$  は

任意の定数行列であり，モータ制御入力信号  $\delta u_{6-n}^{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -\mathbf{K}_{6-n(\text{op})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(\text{op})}, \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{(\text{op})})^T$  を非線形の動力学の状態方程式 [式 (4.31)] と [式 4.32] に代入することで，閉ループ方程式 [式 (6.10)] と [式 (6.12)] が得られる．式 (6.7)  $\mathbf{C}_{M_{\text{rot6-n}(\text{op})}}$  がフルランク 6 ならば，式 (6.10)  $\mathbf{F}_{\text{rot6-n}(\text{op})} - \mathbf{G}_{\text{rot6-n}(\text{op})}\mathbf{K}_{6-n(\text{op})}$  のすべての固有値の実部が負になるような定数行列  $\mathbf{K}_{6-n(\text{op})}$  が定理 7 より存在する．さらにヤコビ行列 ( $\mathbf{F}_{\text{rot6-n}(\text{op})} - \mathbf{G}_{\text{rot6-n}(\text{op})}\mathbf{K}_{6-n(\text{op})}$ ) のすべての固有値の実部が負であり，これは，動作点  $(\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T$  付近の初期値  $(t_0, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T)$  を持つ式 (6.10) の解  $(\varphi(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T), \dot{\varphi}(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T))$  は線形化されたフロアマップ  $(D\varphi(t, (\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T), D\dot{\varphi}(t, (\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T)) (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{(\text{op})}, \dot{\mathbf{x}}_0 - \dot{\mathbf{x}}_{(\text{op})})^T$  とトポロジー的に等価となることがハートマン＝グロブマンの定理により証明されている．つまり，線形化されたフロアマップは漸近安定であるため，動作点  $(\mathbf{x}_{\text{op}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{op}})^T$  付近の初期値  $(t_0, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T) \in \mathbb{R} \times U$  を持つ解  $(\varphi(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T), \dot{\varphi}(t, (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T))$  もまた漸近安定である．したがって，式 (6.12) の加速度  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$  は，動作点ベクトル  $\ddot{\mathbf{r}}_{(\text{op})}$  に近づいていく．これで，定理 8 は証明された．  $\square$

## 6.1 完全なモータ故障の存在下，すべての飛行操作が可能な場合のヘキサロータの安定飛行のシミュレーション

以下において，完全なモータ故障の存在下で，表 4.1 のマヌーバ (ii) のホバー制御が可能な表 4.2 のタイプ (I) の状態の例として，ヘキサロータの番号 1 のモータが完全に故障したというモータ故障のケースを想定する (図 6.1)．ヘキサロータのパラメータなどについては，5 章のものを再び用いる．

飛行状態 (初期値) :  $\psi_{(\text{op})} = \theta_{(\text{op})} = \phi_{(\text{op})} = 0$  [rad],  $\dot{\psi}_{(\text{op})} = \dot{\theta}_{(\text{op})} = \dot{\phi}_{(\text{op})} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>],  $r_{1(\text{op})} = r_{2(\text{op})} = 0$  [m],  $r_{3(\text{op})} = 3$  [m],  $\dot{r}_{1(\text{op})} = \dot{r}_{2(\text{op})} = \dot{r}_{3(\text{op})} = 0$  [m/s],  $c$  (or  $\dot{r}_3$ ) = 0 [m/s<sup>2</sup>], モータ制御信号 (モータ回転速度) :  $\omega_{M2(\text{op})} = \omega_{M3(\text{op})} = \omega_{M5(\text{op})} = \omega_{M6(\text{op})} = 5233.8205$  [rpm],  $\omega_{M4(\text{op})} = 0$  [rpm].

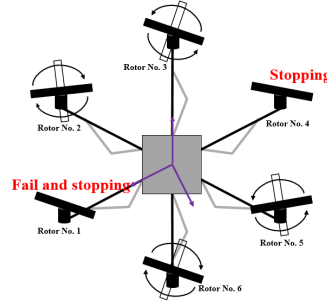


図 6.1 1 番のモータが故障した場合のヘキサロータの飛行 (表 4.2 のタイプ (I) の状態の例)

定理 5 を例 (a) に適用する．

(a) ヘキサロータのモータ番号 1 が故障し停止したときの次の条件下 (図 6.1) :  $t[s] \in [0, 1]$ ,  $\theta = \phi = 0$  [rad],  $\ddot{\theta} = \ddot{\phi} = 0$  [rad/s<sup>2</sup>],  $k_{F2} = k_{F3} = k_{F4} = k_{F5} = k_{F6} = 1.79 \times 10^{(-7)}$  [N/rpm<sup>2</sup>],  $k_{M2} = k_{M3} = k_{M4} = k_{M5} = k_{M6} = 4.38 \times 10^{(-9)}$  [Nm/rpm<sup>2</sup>],  $c$  (or  $\dot{r}_3$ ) = 0 [m/s<sup>2</sup>] のホバリングの飛行状態 (表 4.2 のタイプ (I) の状態と表 4.1 のタイプ (ii) のマヌーバ) を図 6.2 と図 6.3 に示す．

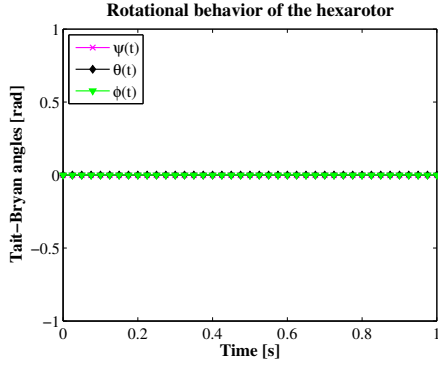


図 6.2 1 番目のモータが故障し停止したときの、墜落を避ける飛行のテイト=ブライアン角のシミュレーション結果 (例 (a)).

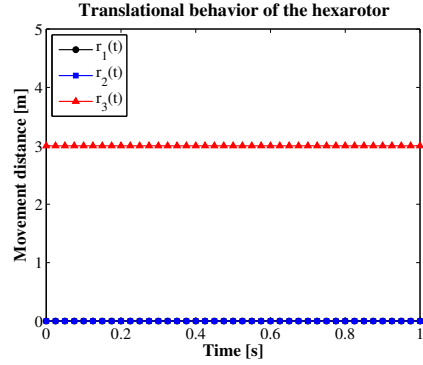


図 6.3 1 番目のモータが故障し停止したときの、墜落を避ける飛行の動きの位置のシミュレーション結果 (例 (a),  $r_3 = 3$  [m]: 初期状態)

図 6.2 と図 6.3 に示すホバリングの飛行状態 (表 4.2 のタイプ (I) の状態と表 4.1 のタイプ (ii) のマヌーバ) を達成するモータ速度制御信号ベクトルは定理 5 により次のように求まる。

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_5^{i_1}) = \mathbf{A}_5^{i_1}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}_5^{i_1} - \mathbf{b}_5, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{A}_5^{i_1}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{5 \times 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{4 \times 5}(\boldsymbol{\eta}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{Qk}^T \mathbf{Q}_{2 \times 5}^{i_1} \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{A}'_{4 \times 5}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{4 \times 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}_{\text{rot}5}^{i_1} \\ \mathbf{e}_{\frac{1}{m}}^T \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{S}_{\text{tra}5}^{i_1} \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{b}_5 = (\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}, c + g, \mathbf{b}'_1)^T \in \mathbb{R}^5, \quad (6.17)$$

ここに  $i_1 = 1, k = 1, \mathbf{Q}_{2 \times 5}^{i_1} \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$ , そして  $\mathbf{b}'_1 \in \mathbb{R}$  である.  $\text{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{Q1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{Q2}\}$  は 2 次元の右手系実ベクトル空間  $\mathbb{R}^2$  の基底ベクトルを表す. 行列  $\mathbf{Q}_{2 \times 5}^{i_1}$  は行列  $\mathbf{Q}_{2 \times 6}$  の 1 列目が削除された行列を表す. 行列  $\mathbf{S}_{\xi 5}^{i_1}$  は行列  $\mathbf{S}_{\xi 6}$  の 1 列目が削除された行列を表す ( $\xi = \text{rot}, \text{tra}$ ).

(a) の例では、フィードバック制御を行わなくても、プロペラモータが完全に故障した場合に、定理 5 がヘキサロータの残りのモータを使用して墜落を回避するためのヘキサロータの飛行状態 (表 4.2 のタイプ (I) の状態と表 4.1 のタイプ (ii) のマヌーバ) を達成することを検証できた。

定理 7 を例 (b) に適用する。

(b) 図 6.1 の場合の条件下で、定理 7 の応用を以下に示す. ヘキサロータの番号 1 のモータが完全に故障したとき、定数行列  $\mathbf{K}_{5(\text{op})} \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$  を以下のように選択する。

$$\mathbf{K}_{5(\text{op})} \in \mathbb{R}^{5 \times 6} = 10^{11} \cdot \begin{pmatrix} 0.8273 & -0.0336 & -0.0591 & 0.0083 & -0.0003 & -0.0006 \\ -0.8273 & 0.0336 & -0.0591 & -0.0083 & 0.0003 & -0.0006 \\ 1.6546 & 0.1346 & 0 & 0.0165 & 0.0013 & 0 \\ -0.8273 & 0.0336 & 0.0591 & -0.0083 & 0.0003 & 0.0006 \\ 0.8273 & -0.0336 & 0.0591 & 0.0083 & -0.0003 & 0.0006 \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

このとき、式 (6.8)  $\mathbf{F}_{\text{rot}5(\text{op})} - \mathbf{G}_{\text{rot}5(\text{op})}\mathbf{K}_{5(\text{op})}$  の固有値はそれぞれ  $-300, -300, -300, -150, -150$ , そして  $-150$  となる. したがって、式 (6.8) の閉ループシステムは漸近安定である。

シミュレーションの初期値を以下のように設定する ( $t$  [s]  $\in [0, 0.1]$ ):

- $\delta\psi(0) = 0.00174533$  [rad],  $\delta\theta(0) = 0$  [rad],  $\delta\phi(0) = 0$  [rad],  $\delta\dot{\psi}(0) = 0$  [rad/s],  $\delta\dot{\theta}(0) = 0$  [rad/s],  
そして  $\delta\dot{\phi}(0) = 0$  [rad/s].
- $\theta_{op} = 0$ , [rad],  $\phi_{op} = 0$ , [rad],  $\dot{\psi}_{op} = 0$  [rad/s],  $\dot{\theta}_{op} = 0$  [rad/s],  $\dot{\phi}_{op} = 0$  [rad/s],  $\omega_{M2(op)} =$   
 $\omega_{M3(op)} = \omega_{M5(op)} = \omega_{M6(op)} = 5233.8205$  [rpm], そして  $\omega_{M4(op)} = 0$  [rpm].

式 (6.8) の閉ループシステムの典型的な振る舞いを図 6.4 と図 6.5 に、式 (6.9) の変分加速度  $\delta\ddot{r}$  の典型的な振る舞いを図 6.6 と図 6.7 に、状態変数フィードバック制御の残存モータ速度制御信号を図 6.8 にそれぞれ示す。図 6.4 の  $\delta\theta(t)$  と  $\delta\phi(t)$  は完全に重なっている。そして、図 6.5 の  $d/dt \delta\theta(t)$  と  $d/dt \delta\phi(t)$  もまた、完全に重なっている。図 6.6 の  $\delta r_1(t)$  と  $\delta r_2(t)$  は完全に重なっている。そして、図 6.7 の  $d/dt \delta r_1(t)$  と  $d/dt \delta r_2(t)$  もまた、完全に重なっている。図 6.8 の  $\delta u_2(t)$  と  $\delta u_6(t)$ ,  $\delta u_3(t)$  と  $\delta u_5(t)$  もまた、完全に重なっている。

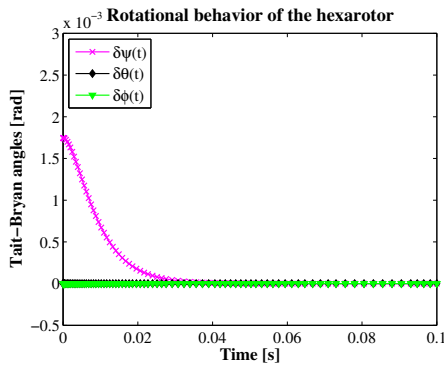


図 6.4 番号 1 のモータが完全に故障した場合の、状態変数フィードバックを持つ線形化された状態方程式による、墜落を回避するための飛行状態を安定化するタイト=ブライアン角のシミュレーション結果 (例 (b))

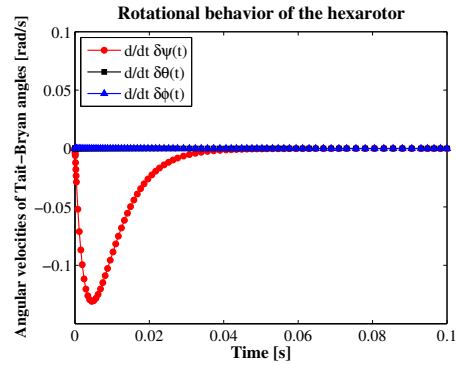


図 6.5 番号 1 のモータが完全に故障した場合の、状態変数フィードバックを持つ線形化された状態方程式による、墜落を回避するための飛行状態を安定化するタイト=ブライアン角の角速度のシミュレーション結果 (例 (b))

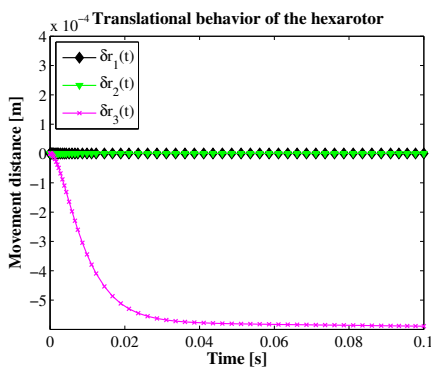


図 6.6 番号 1 のモータが完全に故障した場合の、状態変数フィードバックを持つ線形化された状態方程式による、墜落を回避するための飛行状態を安定化する運動の位置のシミュレーション結果 (例 (b))

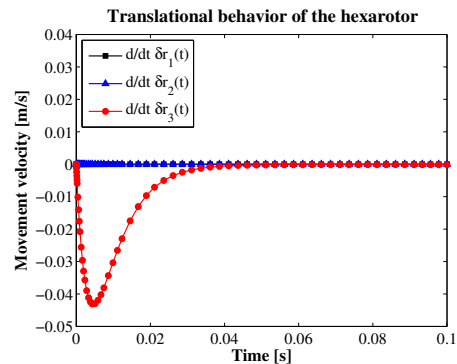


図 6.7 番号 1 のモータが完全に故障した場合の、状態変数フィードバックを持つ線形化された状態方程式による、墜落を回避するための飛行状態を安定化する運動の速度のシミュレーション結果 (例 (b))

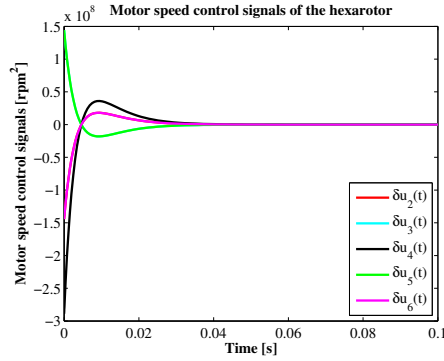


図 6.8 番号 1 のモータが完全に故障した場合の、状態変数フィードバックを持つ線形化された状態方程式による、墜落を回避するための飛行状態を安定化する残存モータ制御信号のシミュレーション結果 (例 (b))

(b) の例では、プロペラモータが完全に故障した場合に、定理 7 がヘキサロータの残りのモータを使用して墜落を回避するためのヘキサロータの飛行状態 (表 4.2 のタイプ (I) の状態) を安定化することを検証できた。

定理 8 を例 (c) に適用、そして式 (6.18) の定数行列  $\mathbf{K}_{5(\text{op})}$  を用いる。

(c) 図 6.1 の場合の条件下で、シミュレーションの初期値を以下のように設定する ( $t \text{ [s]} \in [0 \ 0.1]$ ):

- $\delta\psi(0) = 0.00174533 \text{ [rad]}$ ,  $\delta\theta(0) = 0 \text{ [rad]}$ ,  $\delta\phi(0) = 0 \text{ [rad]}$ ,  $\delta\dot{\psi}(0) = 0 \text{ [rad/s]}$ ,  $\delta\dot{\theta}(0) = 0 \text{ [rad/s]}$ ,  
そして  $\delta\dot{\phi}(0) = 0 \text{ [rad/s]}$ .
- $\theta_{\text{op}} = 0, \text{ [rad]}$ ,  $\phi_{\text{op}} = 0, \text{ [rad]}$ ,  $\dot{\psi}_{\text{op}} = 0 \text{ [rad/s]}$ ,  $\dot{\theta}_{\text{op}} = 0 \text{ [rad/s]}$ ,  $\dot{\phi}_{\text{op}} = 0 \text{ [rad/s]}$ ,  $\omega_{M2(\text{op})} =$   
 $\omega_{M3(\text{op})} = \omega_{M5(\text{op})} = \omega_{M6(\text{op})} = 5233.8205 \text{ [rpm]}$ , そして  $\omega_{M4(\text{op})} = 0 \text{ [rpm]}$ .

状態変数フィードバックを持つ非線形のオイラー角の状態方程式 [式 (6.10)] の典型的な振る舞いを、図 6.9 と図 6.10 に、状態変数フィードバックを持つ非線形の並進の状態方程式 [式 (6.12)] の典型的な振る舞いを、図 6.11 と図 6.12 に、非線形の状態方程式を用いた状態変数フィードバックによる、墜落を回避するための安定した飛行を実現するための残存モータ速度制御信号を図 6.13 にそれぞれ示す。図 6.9 の  $\delta\theta(t)$  と  $\delta\phi(t)$  は完全に重なっている。そして、図 6.10 の  $d/dt \delta\theta(t)$  と  $d/dt \delta\phi(t)$  もまた、完全に重なっている。図 6.11 の  $\delta r_1(t)$  と  $\delta r_2(t)$  は完全に重なっている。そして、図 6.12 の  $d/dt \delta r_1(t)$  と  $d/dt \delta r_2(t)$  もまた、完全に重なっている。図 6.13 の  $\delta u_2(t)$  と  $\delta u_6(t)$ ,  $\delta u_3(t)$  と  $\delta u_5(t)$  もまた、完全に重なっている。

(c) の例では、プロペラモータが完全に故障した場合に、定理 8 がヘキサロータの残りのモータを使用して墜落を回避するためのヘキサロータの飛行状態 (表 4.2 のタイプ (I) の状態) を安定化することを検証できた。



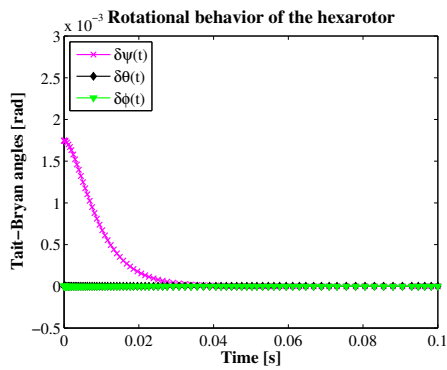


図 6.9 番号 1 のモータが完全に故障した場合の，墜落を回避する安定した飛行を達成する，非線形の状態方程式を用いた状態変数フィードバックによるテイト＝ブライアン角のシミュレーション結果 (例 (c))

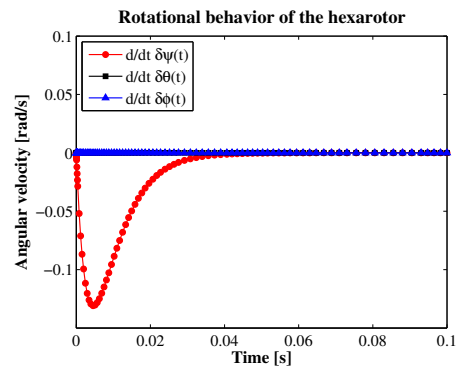


図 6.10 番号 1 のモータが完全に故障した場合の，墜落を回避する安定した飛行を達成する，非線形の状態方程式を用いた状態変数フィードバックによるテイト＝ブライアン角の角速度のシミュレーション結果 (例 (c))

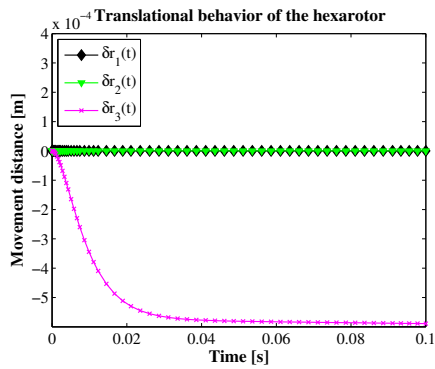


図 6.11 番号 1 のモータが完全に故障した場合の，墜落を回避する安定した飛行を達成する，非線形の状態方程式を用いた状態変数フィードバックによる運動の位置のシミュレーション結果 (例 (c))

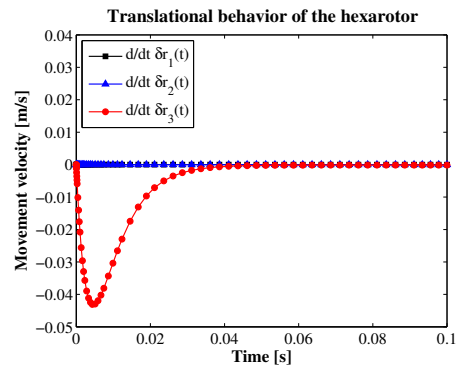


図 6.12 番号 1 のモータが完全に故障した場合の，墜落を回避する安定した飛行を達成する，非線形の状態方程式を用いた状態変数フィードバックによる運動の速度のシミュレーション結果 (例 (c))

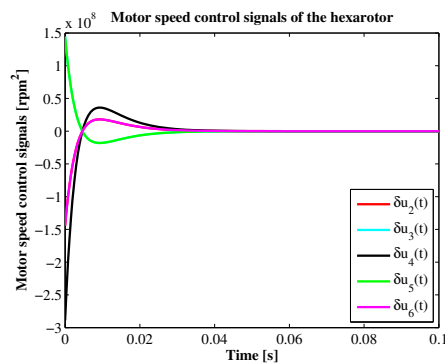


図 6.13 番号 1 のモータが完全に故障した場合の，墜落を回避する安定した飛行を達成する，非線形の状態方程式を用いた状態変数フィードバックによる残存モータ制御信号のシミュレーション結果 (例 (c))

## 第 7 章

# 結論

### 7.1 結論

本研究において以下の結論を得た.

1. アーノルドの作用素  $\mathbf{B}$  (オイラー角の相つぐ 3 つの回転の積行列) とともに 2 つの座標系 (静止座標系  $w$  と動座標系  $W$ ) の関係を明確にまとめた. そして, Kalman の言う状態変数アプローチと, 基底ベクトル  $\mathbf{e}_i \in w, \mathbf{E}_i \in W (i = 1, 2, 3)$  を基礎とするマルチロータの回転の動力学的オイラー角の角度と角速度を状態変数とする状態方程式 (定理 1) とマルチロータのオイラー角の角度に依存する並進の変位の動力学的状態方程式 (定理 2) を与えた. 定理 1 の式 (3.20) の右辺の関数が  $\psi$  の状態変数を持たないことは注目に値する.
2. Kalman の言う状態変数アプローチによって導出したマルチロータの状態方程式 (定理 1 と定理 2) を用いて, マルチロータの動作点 (または, 平衡点) の数学的な定義を与え, 多くの応用における表 4.1 のフライトマヌーバや飛行状態と関係付けることに成功した. そして, オイラー角の状態がマルチロータのそれぞれのモータの回転速度の制御によって, どのように達成されるかを与える, すなわち, それぞれのモータの回転速度の変化によって現在の動作点の状態から, 計画した動作点の状態にどのように達成されるかを把握できる定理 3 を与えた. また, マルチロータの一定高度の飛行とホバリングの飛行を含む, 任意の飛行状態がどのようなモータの回転速度の制御によって達成されるかを与える定理 4 を与えた. 定理 3 または定理 4 を用いることで, 通常の模型飛行機の制御命令の throttle (または altitude), rudder (または yaw), elevator (または pitch), そして ailerons (または roll) をそれぞれ対応するモータの回転速度の制御入力に翻訳し, 無線送信機のための有効な “翻訳” を定義できる.
3. 完全なモータ故障の存在下, マルチロータの残存モータベクトル (故障していない正常なモータ) の数学的定義を与えた. そして, 結論 2 の理論を拡張して, 完全なモータ故障の存在下におけるマルチロータの動作点 (または, 平衡点) の数学的な定義を与え, 墜落を回避する表 4.2 の 2 タイプのマルチロータのフライトマヌーバや飛行状態と関係付けることに成功した. 加えて, 完全なモータ故障の存在下におけるマルチロータの動作点 (または, 平衡点) の定義を基礎に置き, 墜落を回避する飛行状態のための残存モータ速度制御信号ベクトルを直接与える方法として, 表 4.2 のタイプ (I) と (II) の状態を達成するための定理 5 と定理 6 をそれぞれ与えた.
4. 定理 5 と定理 6 によって, マルチロータ (クアッドロータ, ヘキサロータ, そしてオクトロー

タ)の墜落を回避する2タイプの飛行状態のための残存モータ速度制御が与えられ、墜落を回避する飛行例を数値シミュレーションによって示した。墜落を回避する表4.2のマルチロータの2タイプの飛行状態のための残存モータ速度制御の定理5と定理6の例は、1つまたはいくつかのモータが完全に故障し停止したときの墜落を避ける飛行状態に最も適したマルチロータのモータ、プロペラの配置そしてElectric Speed Controller(またはアンプ)の設定をどのように構成したらいいのかのガイドラインになる可能性がある。加えて、定理4、定理5、定理6は、定理の条件を満たすマルチロータの飛行状態のためのモータ速度制御の存在の定理であり、ヘキサロータとオクトロータに必要な行列 $Q_{(2p-4)\times 2p}$ をどのように決定するかはまた別の問題である。本研究ではマルチロータの動力的な見地に基づき、うまく計算ができる行列 $Q_{(2p-4)\times 2p}$ を発見したため、それをを用いている(式(5.1),式(5.2))。

5. モータ故障時に墜落を回避する表4.2のタイプ(I)の状態のヘキサロータの飛行の動作点の安定性の定理7と、そのような飛行状態を風などの外乱の影響下で、安定化するために状態変数フィードバックを持つ非線形のヘキサロータの動力学の状態方程式の定理8を提供した。

## 7.2 今後の展望

1. 定理5と定理6のガイドラインに従って、市販のマルチロータをベースに我々の方法に沿うように部分的な改造を施して、プロペラが完全に故障した場合の墜落を回避するためのいくつかの飛行実験を通じて、定理の有効性を実験的に検証する。
2. モータ故障時に墜落を回避する表4.2のタイプ(II)の状態のヘキサロータの飛行の動作点の安定性の定理と、そのような飛行状態を風などの外乱の影響下で、安定化するために状態変数フィードバックを持つ非線形のヘキサロータの動力学の状態方程式の定理をつくる。

## 参考文献

- [1] R. Mahony, V. Kumar, and P. Corke, “Multirotor Aerial vehicles: Modeling estimation, and control of quadrotor,” *IEEE robotics and automation magazine*, vol. 19, no. 3, pp. 20–32, 2012.
- [2] T. Du, A. Schulz, B. Zhu, B. Bickel, and W. Matusik, “Computational Multicopter Design,” *Journal ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH Asia 2016 TOG Homepage archive*, Vol. 35 Iss. 6, No. 227, November 2016.
- [3] T. Hamel, R. Mahony, R. Lozano, and J. Ostrowski, “Dynamic modelling and configuration stabilization for an X4-flyer,” *Proc. Int. Federation of Automatic Control Symp. (IFAC)*, pp. 1–6, 2002.
- [4] P. Castillo, R. Lozano, and A. Dzul, “Stabilization of a Mini Rotorcraft with Four Rotors,” *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 45–55, 2005.
- [5] S. Bouabdallah, P. Murrieri, and R. Siegwart, “Towards Autonomous Indoor Micro VTOL,” *Autonomous Robots*, vol. 18, pp. 171–183, 2005.
- [6] S. Bouabdallah, P. Murrieri, and R. Siegwart, “Design and control of an indoor micro quadrotor,” *Proceedings of (IEEE) International Conference on Robotics and Automation (ICRA’04) 26 April-1 May New Orleans, USA*, Vol. 5, pp. 4393–4398, 2004.
- [7] G. M. Hoffmann, H. Huang, S. L. Waslander, and C. J. Tomlin, “Quadrotor Helicopter Flight Dynamics and Control: Theory and Experiment,” *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit 20–23 August 2007, Hilton Head, South Carolina, AIAA 2007-6461*, pp. 1–20, 2007.
- [8] G. V. Raffo, M. G. Ortega, and F. R. Rubio, “An integral predictive / nonlinear H-infinity control structure for a quadrotor helicopter,” *Automatica*, vol. 46, pp. 29–39, 2010.
- [9] J. H. Gillula, H. Huang, M. P. Vitus, and C. J. Tomlin, “Design of guaranteed safe maneuvers using reachable sets: Autonomous quadrotor aerobatics in theory and practice,” *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation Anchorage Convention District*, pp. 1649–1654, May 3–8, Anchorage, Alaska, USA, 2010.
- [10] M. Hehn, and R. D’Andrea, “Quadcopter Trajectory Generation and Control,” *Proceedings of the 18th World Congress The International Federation of Automatic Control Milano (Italy) August 28 – September 2*, pp. 1485–1491, 2011.
- [11] L. R. C. Carrillo, A. E. D. Lopes, R. Lozano, and C. Pegard, “Quad Rotorcraft Control Vision-Based Hovering and Navigation,” pp. 23–34, Springer, 2012.
- [12] D. Mellinger, N. Michael and V. Kumar, “Trajectory Generation and Control for Precise Aggressive Maneuvers with Quadrotors,” *Int. J. Robot. Res.*, vol. 31, no. 5, pp. 664–674, 2012.
- [13] V. Artale, C.L.R. Milazzo, and A. Ricciardello, “Mathematical Modeling of Hexacopter,” *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7, no. 97, pp. 4805–4811, 2013.

- [14] P. Martin and E. Salaun, "The true role of accelerometer feedback in quadrotor control," *Robotics and Automation (ICRA)*, 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1623–1629, 3–7 May 2010.
- [15] parallax inc., "How to Fly a Multirotor sUAV," [Online].  
Available: <http://learn.parallax.com/tutorials/robot/elev-8/how-fly-multirotor-suav>.  
Accessed on: Dec. 7, 2019.
- [16] D. Norris, "Build Your Own Quadcopter: Power Up Your Designs with the Parallax Elev-8," pp. 13–32, McGraw-Hill Education TAB, 2014.
- [17] M. Mikkelsen, "Development, Modelling and Control of a Multirotor Vehicle," [Online].  
Available: <https://www.tib.eu/en/search/id/base%3Aftumeauniv%253Aoi%253ADiVA.org%253Aumu-110889/Development-Modelling-and-Control-of-a-Multirotor/>.  
Accessed on: Dec. 7, 2019.
- [18] A. Freddi, A. Lanzon, and S. Longhi, "A feedback linearization approach to fault tolerance in quadrotor vehicles," 18th IFAC World Congress, pp. 5413–5418, Milano Italy August 28 – September 2, 2011.
- [19] M. W. Mueller and R. D'Andrea, "Stability and control of a quadrocopter despite the complete loss of one, two, or three propellers," 2014 IEEE International Conference on Robotics & Automation (ICRA) Hong Kong Convention and Exhibition Center May 31 – June 7, Hong Kong, China, pp. 45–52, 2014.
- [20] S. Dongjie, Y. Binxian, and Q. Quan, "Reliability Analysis of Multicopter Configurations Based on Controllability Theory," *Proceedings of the 35th Chinese Control Conference* July 27–29 Chengdu, China, pp. 6740–6745, 2016.
- [21] M. Saied, B. Lussier, I. Fantoni, H. Shraim, and C. Francis, "Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Control of an Octorotor UAV using motors speeds measurements," *IFAC PapersOnline* 50-1(2017) 5263–5268.
- [22] Y. Yu and Y. Dong, "Global Fault-Tolerant Control of Underactuated Aerial Vehicles with Redundant Actuators," *International Journal of Aerospace Engineering*, Volume 2019, Article ID 9754981, 12 pages.
- [23] R. S. Sánchez Peña, R. Alonso, and P. Anigstein, "Robust optimal solution to the attitude/force control problem," *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems* 36.3 (2000): 784-792.
- [24] J. I. Giribet, R. S. Sanchez-Pena, and A. S. Ghersin, "Analysis and design of a tilted rotor hexacopter for fault tolerance," *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems* 52.4 (2016): 1555-1567.
- [25] J. I. Giribet, C. D. Pose, A. S. Ghersin, and I. Mas, "Experimental validation of a fault-tolerant hexacopter with tilted rotors," *Ingenieria Electronica* [8] (2018).
- [26] R. E. Kalman, "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, vol. 1, no. 2, pp. 152–192, 1963.
- [27] H. Goldstein, "CLASSICAL MECHANICS," 2nd Edn. Addison-Wesley, 1980.
- [28] L. O. Chua, and P. M. Lin, "Computer aided Analysis of Electronic Circuits", pp. 328–363, Prentice Hall Inc., 1975.
- [29] V. I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics," 2nd Edn. Springer-Verlag, 1997.

- [30] Y. Yamamoto, "From Vector Spaces to Function Spaces - Introduction to Functional Analysis with Applications -," pp. 203–207, SIAM, 2012.
- [31] T. S. Alderete, "Simulator aero model implementation," NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA. [Online].  
Available: <https://www.aviationsystemsdivision.arc.nasa.gov/publications/hitl/rtsim/Toms.pdf>.  
Accessed on: Dec. 7, 2019.
- [32] K. Isogai, S. Yin, H. Nakano, and H. Okazaki, "A mathematical property of Lagrangian mechanics by using Arnold's operator," IEICE Tech. Rep., vol. 117, no. 226, NLP2017-57, pp. 47–50, Oct. 2017 (in Japanese).
- [33] W. Fleming, "Functions of Several Variables," Springer Verlag, 1977.
- [34] F. C. Moon, "Applied Dynamics: With Applications to Multibody and Mechatronic System," pp. 103–167, pp. 168–253, pp. 474–477, John Wiley and Sons Inc., 1998.
- [35] S. Kodama and N. Suda, "Matrix Theory for Systems and Control," The Society of Instrument and Control Engineers of Japan, Tokyo, 1978.
- [36] E. Eriksson, D. Estep, and C. Johnson, "Applied Mathematics: Body and Soul," vol. 2, pp. 621–626, Springer Verlag, 2004.
- [37] K. Isogai, R. Inohara, H. Nakano, and H. Okazaki, "A construction of a quadcopter by using a student embedded device," IEICE Tech. Rep., vol. 115, no. 422, CAS2015-73, pp. 67–72, Jan. 2016 (in Japanese).
- [38] D. J. Higham and N. J. Higham, "MATLAB Guide, Second Edition," pp. 175–184, SIAM, 2005.
- [39] H. Okazaki, K. Yashikida, and H. Mizutani, "A one dimensional mapping method for time series data," 2012 IEEE 55th International Midwest Symposium, on Circuits and Systems (MWSCAS), pp. 490–493, 2012.
- [40] R. S. Strichartz, "The way of analysis", Jones & Bartlett Learning, 2000.
- [41] M. Urabe, "Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems," Arch. Rational Mech. Anal. 20 (1965), pp. 120–152.
- [42] S. Oishi, "Introduction to Nonlinear Analysis," Corona Publishing 1997 (in Japanese).
- [43] W. M. Wonham, "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC. 12, no. 6, pp. 660–665, 1967.
- [44] J. Guckenheimer and P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields," Springer-Verlag, 1983.
- [45] T. Kawase, "Technical Emulation (Maneru)," Ohmsha, 1995 (in Japanese).
- [46] D. G. Luenberger, "Introduction to Dynamic Systems - Theory, Models, and Applications -," pp. 307–309, John Wiley and Sons, 1979.

# 付録

## A 陰関数定理

定理 (Implicit Function Theorem: theorem 13.1.1 [40])  $F(x, y)$  を  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  と  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$  の近傍の領域で  $\mathbb{R}^3$  の値域を持つ  $C^1$  関数とおく. さらに  $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = c$  を満たすとする.

このとき, もし  $F_y(\tilde{x}, \tilde{y})$  が逆行列を持つならば, 全ての  $x \in U$  に対して,  $y(\tilde{x}) = \tilde{y}$  と  $F(x, y(x)) = c$  が成立するような  $C^1$  関数  $y: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  と  $\tilde{x}$  の近傍  $U$  が存在する. さらに  $F(x, z) = c$  を満足する  $V$  の中の唯一の解  $z$  が存在するような, すなわち  $z = y(x)$  であるような  $\tilde{x}$  の近傍  $V$  ( $V$  は  $y(U)$  の像である) が存在する中で  $y$  は唯一である. さらに

(i)  $y$  の微分, すなわち  $m \times n$  行列  $dy(x)$  は以下のように陰的微分演算によって計算できる.

$$dy(x) = -[F_y(x, y(x))]^{-1} F_x(x, y(x)). \quad (\text{A.1})$$

(ii)  $y(x)$ ,  $x \in U$  は以下のように  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  でのアフィン近似によって近似される.

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \tilde{y} + dy(\tilde{x}) \cdot (x - \tilde{x}) \\ &= \tilde{y} - [F_y(\tilde{x}, \tilde{y})]^{-1} F_x(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot (x - \tilde{x}). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

この定理の (i) を含む全ての記述は [40] の theorem 13.1.1 と全く同じものである. Strichartz は (ii) の部分を theorem 13.1.1 に加えていないが, その定理の証明として (ii) の部分を扱っている. したがって, 上記の定理の証明は割愛する.

## B 構成的陰関数定理

定理 (構成的陰関数定理)  $F(x, y)$  を  $x \in U_\epsilon \subset U \subset \mathbb{R}^n$  と  $y \in V_\delta \subset V \subset \mathbb{R}^m$  の近傍の領域で,  $\mathbb{R}^m$  の値域を持つ  $C^1$  関数とおく. このとき, 以下の式 (B.3) の関係を満たす.

$$F(x, y) = c. \quad (\text{B.3})$$

そして, 式 (B.3) の  $F(x, y) = c$  は変数  $y$  に関するヤコビアン行列  $F_y(x, y)$  の行列式が  $(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$  で 0 にならないような  $F(x, y) = c$  の近似解:  $\tilde{y}$  s.t.  $F(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx c$  を持つと仮定する. また, 以下のよう性質を持つ正の定数:  $\epsilon, \delta$  と非負の定数:  $\kappa_1 < 1, \kappa_2 < 1$  ( $\kappa_1 + \kappa_2 < 1$ ) が存在すると仮定する.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} U_\epsilon = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \epsilon\} \subset U, \\ \text{(ii)} V_\delta = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\| \leq \delta\} \subset V, \\ \text{(iii)} \|\mathbf{F}_y(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{F}_y(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})\| \leq \kappa_1/M, \\ \text{for any } \mathbf{y} \in V_\delta, \\ \text{(iv)} \|\mathbf{F}_y(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) - \mathbf{F}_y(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq \kappa_2/M, \\ \text{for any } \mathbf{y} \in V_\delta, \text{ and for any } \mathbf{x} \in U_\epsilon, \\ \text{(v)} \frac{M(r+M'\epsilon)}{1-(\kappa_1+\kappa_2)} < \delta, \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

ここに  $r, M$ , そして  $M' (> 0)$  は以下の性質を満足する定数である.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \|\mathbf{c} - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})\| \leq r \text{ and } \|\mathbf{F}_y(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})^{-1}\| \leq M, \\ \text{(ii)} \|\mathbf{F}_x(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}})\| \leq M' \text{ for any } \mathbf{x} \in U_\epsilon, \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

このとき式 (B.3)  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}$  は, すべての  $\mathbf{x} \in U_\epsilon$  に対して,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$  を満足する唯一の  $C^1$  関数の解:  $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in V_\delta$  を持つ. そして, 以下の近似解の誤差評価が成立する.

$$\|\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{y}}\| \leq \frac{M(r+M'\epsilon)}{1-(\kappa_1+\kappa_2)}. \quad (\text{B.6})$$

さらに

(i) すべての  $\mathbf{x} \in U_\epsilon$  に対して  $\mathbf{y}$  の微分, すなわち,  $m \times n$  行列  $d\mathbf{y}(\mathbf{x})$  は以下のように陰的微分演算によって計算できる.

$$d\mathbf{y}(\mathbf{x}) = -[\mathbf{F}_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{F}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}))]. \quad (\text{B.7})$$

(ii)  $\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in U_\epsilon$  は以下のように,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{y}(\mathbf{x}')) = \mathbf{c}, \mathbf{x}' (\neq \mathbf{x}) \in U_\epsilon$  を満足する  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}(\mathbf{x}'))$  でのアフィン近似によって近似される.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}) &\approx \mathbf{y}(\mathbf{x}') + d\mathbf{y}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \mathbf{y}(\mathbf{x}') - [\mathbf{F}_y(\mathbf{x}', \mathbf{y}(\mathbf{x}'))^{-1} \mathbf{F}_x(\mathbf{x}', \mathbf{y}(\mathbf{x}'))] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

この定理のバックボーンは付録の陰関数定理 [40] と占部の定理 [41] を基礎として, [42] の構成的陰関数定理の構成方法を参考にして行っている. [42] の構成的陰関数定理の成立条件と異なる条件を与えていること, (i) の  $\mathbf{y}$  の微分の存在範囲を与えていること, そして, (ii) のアフィン近似の関係式を与えていることが新規性になっている.

**定理 9** (定理 3 の構成的陰関数定理版)  $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x})$  を  $\mathbf{u}_{2p} \in U_\epsilon \subset \mathbb{R}^{2p}$  と  $\mathbf{x} \in V_\delta \subset \mathbb{R}^3$  の近傍の領域で  $\mathbb{R}^3$  の値域を持つ  $C^1$  関数とおく. さらに式 (4.1) と式 (4.2) を用いて与えられ,  $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}) = \mathbf{c}$  を満たすとする.

具体的には以下のように定義されるものとする.

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p} \mathbf{u}_{2p} \rangle \\ \langle \mathbf{e}_j, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{n} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p} \mathbf{u}_{2p} \rangle \\ \langle \mathbf{e}_3, -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{\text{tra}2p} \mathbf{u}_{2p} \rangle \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{I}} \mathbf{B}(\mathbf{x})^\top \cdot \boldsymbol{\omega}_{\dot{\mathbf{x}}}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta}))^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (\text{B.10})$$

ここに  $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta})^\top$ ,  $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})^\top$ .  $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2, i, j \in \mathbb{N}$ .  $\mathbf{c} = (0, \ddot{r}_j, c)^\top \in \mathbb{R}^3$ ,  $\ddot{r}_j, c \in \mathbb{R}$  はある定数を表す.



そして、式 (B.9) の  $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}) = \mathbf{c}$  は変数  $\mathbf{x}$  に関するヤコビアン行列  $\mathbf{H}_x(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x})$  の行列式が  $(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}) = (\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}})$  で 0 にならないような  $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}) = \mathbf{c}$  の近似解:  $\tilde{\mathbf{x}}$  s.t.  $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}}) \approx \mathbf{c}$  を持つと仮定する。また、以下のような性質を持つ正の定数:  $\epsilon, \delta$  と非負の定数:  $\kappa_1 < 1, \kappa_2 < 1$  ( $\kappa_1 + \kappa_2 < 1$ ) が存在すると仮定する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } U_\epsilon = \{\mathbf{u}_{2p} \mid \|\mathbf{u}_{2p} - \tilde{\mathbf{u}}_{2p}\| \leq \epsilon\} \subset \mathbb{R}^{2p}, \\ \text{(ii) } V_\delta = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \delta\} \subset \mathbb{R}^3, \\ \text{(iii) } \|\mathbf{H}_x(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_x(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \mathbf{x})\| \leq \kappa_1/M, \\ \text{for any } \mathbf{x} \in V_\delta, \\ \text{(iv) } \|\mathbf{H}_x(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \mathbf{x}) - \mathbf{H}_x(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x})\| \leq \kappa_2/M, \\ \text{for any } \mathbf{x} \in V_\delta, \text{ and for any } \mathbf{u}_{2p} \in U_\epsilon, \\ \text{(v) } \frac{M(r+M'\epsilon)}{1-(\kappa_1+\kappa_2)} < \delta, \end{array} \right. \quad (\text{B.11})$$

ここに  $r, M$ , そして  $M' (> 0)$  は以下の性質を満足する定数である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \|\mathbf{c} - \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}})\| \leq r \text{ and } \|\mathbf{H}_x(\tilde{\mathbf{u}}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}})^{-1}\| \leq M, \\ \text{(ii) } \|\mathbf{H}_{u_{2p}}(\mathbf{u}_{2p}, \tilde{\mathbf{x}})\| \leq M' \text{ for any } \mathbf{u}_{2p} \in U_\epsilon, \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

このとき式 (B.9)  $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}) = \mathbf{c}$  は、すべての  $\mathbf{u}_{2p} \in U_\epsilon$  に対して、 $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p})) = \mathbf{c}$  を満足する唯一の  $C^1$  関数の解:  $\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}) \in V_\delta$  を持つ。そして、以下の近似解の誤差評価が成立する。

$$\|\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}) - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \frac{M(r+M'\epsilon)}{1-(\kappa_1+\kappa_2)}. \quad (\text{B.13})$$

さらに

(i) すべての  $\mathbf{u}_{2p} \in U_\epsilon$  に対して  $\mathbf{x}$  の微分, すなわち,  $3 \times 2p$  行列  $d\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p})$  は以下のように陰的微分演算によって計算できる。

$$d\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}) = -[\mathbf{H}_x(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}))^{-1} \mathbf{H}_{u_{2p}}(\mathbf{u}_{2p}, \mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}))]. \quad (\text{B.14})$$

(ii)  $\mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}), \mathbf{u}_{2p} \in U_\epsilon$  は以下のように,  $\mathbf{H}(\mathbf{u}'_{2p}, \mathbf{x}(\mathbf{u}'_{2p})) = \mathbf{c}, \mathbf{u}'_{2p} (\neq \mathbf{u}_{2p}) \in U_\epsilon$  を満足する  $(\mathbf{u}'_{2p}, \mathbf{x}(\mathbf{u}'_{2p}))$  のアフィン近似によって近似される。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{u}_{2p}) &\approx \mathbf{x}(\mathbf{u}'_{2p}) + d\mathbf{x}(\mathbf{u}'_{2p}) \cdot (\mathbf{u}_{2p} - \mathbf{u}'_{2p}) \\ &= \mathbf{x}(\mathbf{u}'_{2p}) - [\mathbf{H}_x(\mathbf{u}'_{2p}, \mathbf{x}(\mathbf{u}'_{2p}))^{-1} \mathbf{H}_{u_{2p}}(\mathbf{u}'_{2p}, \mathbf{x}(\mathbf{u}'_{2p}))] \cdot (\mathbf{u}_{2p} - \mathbf{u}'_{2p}). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

(iii)  $\ddot{\psi}$  は以下のように決定される。

$$\ddot{\psi} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Z}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}_{\text{rot}2p} \mathbf{u}_{2p} \rangle. \quad (\text{B.16})$$

上記の構成的陰関数定理を定理 3 に素直に適用することで上記の結果を得ることができるので、証明を割愛する。

## C ハートマン＝グロブマンの定理

$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を微分可能な関数とする.

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{C.17})$$

ここに  $t \in \mathbb{R}$ : 時間,  $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ : 時間  $t$  におけるシステムの  $n$  次元の状態ベクトル,  $x_0$ : 初期状態, として  $n \in \mathbb{N}$ . 初期値問題の解: 式 (C.17) は少なくともいくつかの近傍  $t = 0, t \in (-c, c), c \in \mathbb{R}$  で定義される. それから局所フロー  $\varphi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は,  $\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$  によって定義される. 固定点  $\bar{x}$ , すなわち  $f(\bar{x}) = 0$ , があり, 式 (C.17) を固定点  $\bar{x}$  で線形化することにより, つまり, 線形化されたフローマップ  $D\varphi_t(\bar{x})\xi$  を次のように調べることににより,  $\bar{x}$  付近の解  $\varphi_t$  の振る舞いを特徴付ける.

$$D\varphi_t(\bar{x})\xi = \exp(tDf(\bar{x}))\xi. \quad (\text{C.18})$$

固定点  $\bar{x}$  での式 (C.17) から生じる線形化されたフローマップ  $D\varphi_t(\bar{x})\xi$  は, 積分により式 (C.19) から得られる.

$$\frac{d\xi}{dt} = Df(\bar{x})\xi, \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{C.19})$$

ここに  $Df = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$  は, 関数  $f = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))^T$ , ( $T$  は転置を表す) の 1 次偏微分のヤコビ行列, そして  $x = \bar{x} + \xi, |\xi| \leq 1$ .

式 (C.17) の  $\bar{x}$  近くの解  $\varphi_t$  と, 式 (C.19) の線形化されたフローマップ  $D\varphi_t(\bar{x})\xi$  は, 以下のハートマン＝グロブマンの定理によって, トポロジ的に等価となる. 例えば, ハートマン＝グロブマンの定理は,  $D\varphi_t(\bar{x})\xi$  が漸近安定である場合,  $\bar{x}$  付近の  $\varphi_t$  もまた, 漸近安定であることを保証する.

定理 (Theorem 1. 3. 1 (Hartman–Grobman) [44], p. 13) もし,  $Df(\bar{x})$  の固有値が 0 または純虚数でないならば, 式 (C.17) の非線形フロー  $\varphi_t$  とそれらの式 (C.19) の線形フロー  $\exp(tDf(\bar{x}))$  のとる軌道は  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  のある近傍  $U$  上で, 位相同型  $h$  を定義する. 位相同型は軌道の向きを保持し, 時間  $t$  によるパラメータ化を保持するように選択することもできる.

# 謝辞

本研究は、著者が湘南工科大学大学院博士後期課程在学中になされたものである。本研究を進めるにあたり、終始あたたかい御指導を賜りました岡崎秀晃 教授、岡崎千穂 先生、中野秀夫 教授に心からの感謝の意を表します。

また、中上川友樹 教授、森貴彦 准教授、池田裕一 准教授、菊地慶祐 准教授、ドン・メイビン 教授始め多くの御教示をいただきました諸先生方に深く感謝いたします。

さらに、急なお願いにもかかわらず、本論文の審査員を務めてくださいました長崎大学副学長 山本郁夫 教授に深く感謝いたします。

加えて、湘南工科大学大学院電気情報工学専攻岡崎研究室 尹思源君とは共同で研究を進め、多くの刺激と示唆を得ることができました。感謝の意を表します。

本研究の遂行並びに本論文の作成にあたり、多くの手助けをしていただいた湘南工科大学大学院電気情報工学専攻岡崎研究室 小澤和也君始め同輩、後輩諸君に感謝いたします。

最後に、今日までの著者の研究生生活を可能にくださった両親に感謝いたします。

# 研究業績リスト

## 学術論文（査読有り）

1. K. Isogai and H. Okazaki, “CONDITIONS TO REALIZE HEXAROTOR STABLE FLIGHTS TO AVOID A CRASH UNDER COMPLETE PROPELLOR MOTOR FAILURES.,” Int. J. Adv. Res. 8(01), 2020, pp. 261–278. (6 章)
2. K. Isogai, H. Nakano, and H. Okazaki, “How to Avoid a Multirotor Flight Crash under Complete Propeller Motor Failures based on State Variable Approach,” Sens. Mater., Vol. 31, No. 12, 2019, pp. 4173–4203. (4.2 節, 5.2 節)

## 国際会議論文（査読有り）

1. K. Isogai, H. Nakano, and H. Okazaki, “Modeling and Flight Control Simulation of Multirotors,” 2018 IEEE 61st International Midwest Symposium on Circuits and Systems (The IEEE MWSCAS 2018), pp. 388–391, 5–8 August 2018, Windsor, Canada. (4.1 節)
2. H. Okazaki, Siyuan Yin, K. Isogai, and H. Nakano, “Motor speed control signals for multirotor flights in the presence of complete propeller motor failures,” 2018 IEEE 61st International Midwest Symposium on Circuits and Systems (The IEEE MWSCAS 2018), pp. 384–387, 5–8 August 2018, Windsor, Canada. (4.2 節)
3. K. Isogai, R. Inohara, H. Nakano, and H. Okazaki, “Modeling and Simulation of Motion of a Quadcopter,” 2016 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA2016), pp. 165–168, 27–30 November 2016, Yugawara, Japan. (2 章)
4. H. Okazaki, K. Isogai, and H. Nakano, “Modeling and Simulation of Motion of a Quadcopter in a Light Wind,” 2016 IEEE 59th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (The IEEE MWSCAS 2016), pp. 117–120, 16–19 October 2016, Abu Dhabi, UAE. (2 章)

## 依頼講演

1. 磯貝海斗, 岡崎秀晃, “空飛ぶドローン（マルチロータ）の状態変数の重要性,” 依頼シンポジウム, AI-1. 回路とシステムにおける状態方程式の多種多様な応用, Proceedings of the 2018 IEICE Society Conference, 2018 年 ソサエティ大会講演論文集, 金沢大学 2018 年 9 月. (3 章, 4 章, 5 章)

## 学会発表

1. 尹思源, 磯貝海斗, 中野秀夫, 岡崎秀晃, “完全なプロペラモータ故障の存在下でのマルチロータの飛行計画のための定理について,” 電子情報通信学会 信学技報, vol. 117, no. 400, CAS2017-127, pp. 87-92, 2018 年 1 月. (4.2 節)
2. 岡崎秀晃, 磯貝海斗, 中野秀夫, “マルチロータのフライトコントロールを与える構成的陰関数定理について,” 電子情報通信学会 信学技報, vol. 117, no. 225, CAS2017-27, pp. 17-22, 2017 年 10 月. (4.1 節, 付録 A, 付録 B)
3. 尹思源, 磯貝海斗, 中野秀夫, 岡崎秀晃, “マルチロータのモータ故障問題,” 電子情報通信学会 信学技報, vol. 117, no. 225, CAS2017-29, pp. 29-33, 2017 年 10 月. (4.2 節)
4. 磯貝海斗, 猪原亮, 中野秀夫, 岡崎秀晃, “学生向け組み込みデバイスによるクアッドコプターの制御について,” 電子情報通信学会 信学技報, vol. 115, no. 239, CAS2015-36, pp. 81-86, 2015 年 10 月. (2 章)